



DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdtqk.2017.04.023

党康宁,王媛,宋志强,等.基于速度势法的水电站进水塔弯曲自由振动解析解[J].南水北调与水利科技,2017,15(4):142-147,167. DANG Kang ning, WANG Yuan, SONG Zhi Qiang, et al. The analytical solution of free bending vibration of intake tower in hydroelectric power station based on the velocity potential analysis method[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2017, 15(4): 142-147, 167. (in Chinese)

基于速度势法的水电站进水塔弯曲自由振动解析解

党康宁¹, 王媛¹, 宋志强¹, 刘云贺¹, 张希²

(1. 西安理工大学, 西安 710048; 2. 西安市水利规划勘测设计院, 西安 710054)

摘要:介绍了基于速度势解析算法求解水电站进水塔在水中弯曲自由振动的方法。分析进水塔的主要受力特点,为引入流体速度势解析算法对结构进行简化和假设。以分布参数梁体系推导得到无水时进水塔弯曲自由振动频率方程,根据速度势拉普拉斯方程确定了所求解问题的边界条件,通过内外水压力表达式建立进水塔的弯曲自由振动方程。推导振动方程得到频率方程,经过数学软件编程求解,最终可得到结构振型和频率。推导过程表明流体速度势法是将水体转化成与塔体振型相关的质量附加于结构,从而影响结构的振动。与数值方法对比和探讨,分析了两者异同,提出本文方法适用范围。结果表明,本文解法可以引入内外含水矩形横截面进水塔的弯曲自由振动问题的求解,为下一步进水塔地震响应分析提供一种新的思路。

关键词: 进水塔; 弯曲自由振动; 速度势法; 解析方法; 流固耦合

中图分类号: TV 312 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672 1683(2017) 04-0000-00

The analytical solution of free bending vibration of intake tower in hydroelectric power station based on the velocity potential analysis method

DANG Kang ning¹, WANG Yuan¹, SONG Zhi Qiang¹, LIU Yun he¹, ZHANG Xi²

(1. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. Xi'an Institution of Water Resources Planning and Engineering Surveying, Xi'an 710054, China)

Abstract: This paper introduces the velocity potential analysis method for solving the free bending vibration of an intake tower in water in a hydroelectric power station. It analyzes the basic mechanical characteristics of an intake tower and makes some simplification and hypothesis for the structure in order to introduce the velocity potential analysis method. The frequency equation of the free bending vibration of a standalone intake tower is derived from the distribution parameter beam system. The boundary conditions of the problem are determined according to the Laplace equation of the velocity potential. The bending vibration equation of the intake tower is established via the expression of internal and external water pressure. The frequency equation is derived from the vibration equation. The structural vibration mode and frequency can be obtained through mathematical software programming. The derivation shows that the fluid velocity potential method converts the water into added mass that is associated with the vibration mode of the tower and thus affects the vibration of the structure. This paper then compares this method with the numerical method, analyzes their similarities and differences, and proposes the scope of application of this method. Results show that this method can be used to solve the free bending vibration problem of intake towers with a rectangular cross section and water on both the inside and the outside, and provides a new way of thinking for further analysis of the seismic response of intake towers.

Key words: intake tower; free bending vibration; velocity potential method; analytic method; fluid solid coupling

收稿日期: 2016-04-29 修回日期: 2016-12-19 网络出版时间:

网络出版地址:

基金项目: 国家自然科学基金(51179154; 51479165)

Fund: National Natural Science Foundation of China(51179154; 51479165)

作者简介: 党康宁(1988-), 男, 陕西凤翔人, 博士研究生, 主要从事水工结构抗震分析。E-mail: wnw@qq.com

通讯作者: 刘云贺(1968-), 男, 辽宁凌源人, 教授, 博士生导师, 主要从事为结构抗风抗震, 防灾减灾方面研究。E-mail:

水电站进水塔为高耸的悬臂结构,一般情况下,进水塔处于水体包围中,内外均有不超过结构高度的流动水体。因高宽比较大结构抗弯刚度相对较柔,在库中受到的风、地震等横向荷载作用^[1]起主导作用。地震时结构-流体耦联情况下结构的响应一直为学者积极研究的问题,水体对结构的影响机理及处理方法备受关注^[2,3]。

对于水中结构响应的研究,从20世纪30年代开始学者便对水中柱体的弯曲自由振动进行研究,并取得一些成果^[4,6]。速度势解析方法以其理论基础完善、求解结果精确、更能反映问题内在机理等特点,很早便在固体和流体耦合领域采用。国内学者在20世纪80年代、90年代对水中结构的自由振动问题进行了大量的研究:张悉德对部分埋入水中的悬臂圆柱体和椭圆柱体的弯曲自由振动进行了研究^[7,8],首次给出柱水耦联体系振型函数的精确解和以有限阶行列式表示的频率方程。周叮、朱永谊、陈怡然等学者^[9,14]研究了贮液圆筒、椭圆筒、圆环形贮液容器等多种截面形状的水中结构自由振动问题,亦考虑表面波,不同深度等因素的影响,导出了贮液圆筒的振型函数及固有频率的精确计算公式。以上研究着眼于解决工程问题,以水中实心或空心圆柱、椭圆柱结构为主,采用速度势解析方法,结构没于水中或高于液面,内部有水或仅外部有水等情况求解其水中振型函数及固有频率。对于水中进水塔的自由振动问题,采用解析算法的研究较少,董育坚^[15]对拉普拉斯表示的动水压力用数值法求解该方程,并采用有限元理论详细推导了矩形截面进水塔的地震动水压力。

进水塔为内外充水,部分淹没于水中的高耸悬臂式结构,其边界条件较为简单,与上述研究结构既有很多相似之处也有不同:进水塔横截面为矩形,中空薄壁,振动时内外动水压力应共同对结构产生影响。因此,如尝试将流固耦合的解析算法推广到此类结构上具有重要意义。本文根据进水塔的主要受力特点,将其等效简化为受弯曲振动的梁结构,将速度势解析方法引入求解塔体-水体耦联弯曲振动,为其后续地震作用下结构响应提供基础,也为研究类似水中中空矩形截面结构提供一种新的思路和方法。

1 基本模型

1.1 塔水耦合模型及简化假设

文献[16]通过对进水塔动水压力的研究表明地震荷载作用下,顺水流方向动水压力远大于水体重力对进水塔的影响,且惯性耦合作用主要存在与水

流方向。本文研究对象为考虑平面内(沿X轴向)弯曲的进水塔,图1示意了塔-水耦合体系。

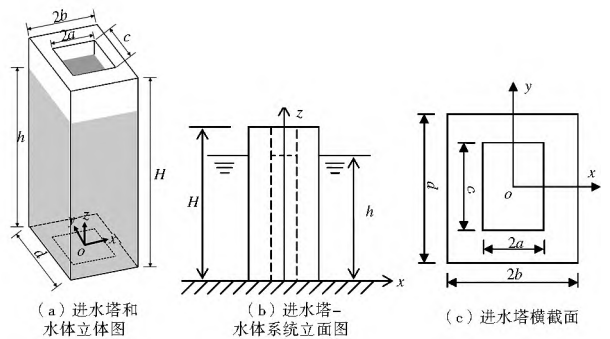


图1 进水塔和水体立面和横截面示意图

Fig. 1 Vertical and cross section view of the intake tower with water

图1中: H 为塔体总高度; h 为塔内外水位高度; $a \sim d$ 为内外横截面的尺寸; x 坐标轴为塔弯曲振动方向; z 坐标轴沿塔高方向。

作为初步探索,为简化计算,对研究对象作以下假定和简化:

- (1) 塔身截面尺寸沿高度不变,即质量均布、截面抗弯刚度相同。
- (2) 假设水体是理想不可压缩的无粘流体,运动是无旋的;不考虑重力波影响;塔内外水位高度相同。
- (3) 塔身沿高度作梁型振动,不会出现截面变形的环向振型,可以当成为弯曲悬臂梁来处理。

1.2 无水进水塔的弯曲自由振动

基于分布参数梁体系的悬臂进水塔其无水状况下自由弯曲振动方程为^[17,18]:

$$EI \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} + m(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: EI 是进水塔的侧向抗弯刚度; $x(z, t)$ 为梁与 z 坐标和时间 t 有关的侧向位移; $m(z)$ 为沿 z 方向的截面质量变化。

定义 $k^4 = \frac{\omega^2 m(z)}{EI}$, ω 为自振圆频率;假设塔体总高度为 H ,上式求解得到的频率方程为:

$$1 + \cos kH \operatorname{ch} kH = 0 \quad (2)$$

方程(2)的频率为 $\omega^2 = \frac{EI}{\rho_0 F} k^4$,其中 ρ_0 为进水塔混凝土密度; F 为进水塔的横截面面积。

求解式(2)进水塔频率超越方程最终可得到孤塔(无水)的各阶振型函数。

2 塔水耦合模型塔的弯曲自由振动

2.1 势流体的动水压力

基于理想流体假定,在流场内的微元六面体在任意位置的惯性力、压力和质量力的作用下满足欧

拉方程^[19-20]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \Delta p \quad (3)$$

式中: \vec{v} 为质点的流速; \vec{f} 为单位质量流体上所受的质量力; ρ 为流体的密度, Δ 为哈密顿微分算符; p 为流体动压强。

速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 满足拉普拉斯方程:

$$\Delta^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

式中: Δ^2 为拉普拉斯算子。

根据流体中的速度势函数 φ 和质量力势函数 U 有:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \quad \vec{f} = - \text{grad } U \quad (5)$$

定义压力函数 Π 为:

$$\Pi(x, y, z, t) = \int \frac{dp}{\rho} \quad (6)$$

如果流体微团运动速度小到可以忽略速度的二次项以上的量, 且流体质量力仅由重力产生, 则由式(3), 式(5)可以得到如下流体中压力的关系式:

$$p = - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g z \quad (7)$$

式中: $\rho g z$ 为流体静压; $\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 为流体液动压力。

2.2 边界条件

基于前述假设, 图 1 所示问题的边界条件为: 塔体底部水体的运动速度的垂直分量为零; 忽略表面波作用; 塔体壁面水体的速度与塔体壁面运动速度相同。由此建立塔体内外待求问题方程组分别为:

$$\begin{cases} \Delta \varphi_1 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ \varphi_1 \Big|_{z=h} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_2 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ \varphi_2 \Big|_{z=h} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=\pm b} = \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (8)$$

由分离变量法可设:

$$\begin{cases} \text{塔体内部} \\ \text{塔体外部} \end{cases} \begin{cases} \varphi_1 = X(x)Z(z)\hat{T}(t) \\ x = x(z, t) = X(x)T(t) \\ \varphi_2 = X(x)Z(z)\hat{T}(t) \\ x = x(z, t) = X(x)T(t) \end{cases}$$

2.3 求解塔体内外的速度势函数

根据边界条件, 求解偏微分方程可将塔体内部速度势表示为:

$$\varphi_1 = \hat{T} \sum_{s=1}^{\infty} (C'_s \text{sh} m_s x + D'_s \text{ch} m_s x) \text{cos} m_s z \quad (9)$$

其中, C', D' 为系数, $m_s = \frac{2s-1}{2h} \pi$ ($s = 1, 2, 3 \dots$)。

由式(8)并利用三角函数的正交性可求得系数 C' 和 D' , 因此, 塔内的速度势函数为:

$$\varphi_1 = \hat{T} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} m_s x \text{cos} m_s z}{h m_s \text{ch} m_s a} \cdot \int_0^h X(z) \text{cos} m_s z dz \quad (10)$$

同理, 可得到塔体外部的速度势函数:

$$\varphi_2 = \hat{T} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} n_s x \text{cos} n_s z}{h n_s \text{ch} n_s b} \cdot \int_0^h X(z) \text{cos} n_s z dz, \text{ 其}$$

中 $n = \frac{2s-1}{2h} \pi$ ($s = 1, 2, 3 \dots$)。

2.4 塔体振动方程的建立

对于进水塔内、外单位高度上的动水压力为两侧壁面压力和, 由式(7), 对式(10)进行求导可求得塔体内、外水中任意一点处的液动压力 $p_{内}$ 和 $p_{外}$ 。其中, 塔体内部动水压力为:

$$p_{内} = - 2\rho \hat{T} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} m_s a \text{cos} m_s z}{h m_s \text{ch} m_s a} \cdot \int_0^h X(z) \text{cos} m_s z dz \quad (11)$$

由梁的偏微分运动方程可知进水塔在 $0-h$ 段塔体弯曲振动方程为:

$$EI \frac{\partial^4 x_1}{\partial z^4} = - \rho_0 F \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{内} - p_{外} \quad (12)$$

根据分离变量法, 假设塔体在 $0 \sim h$ 段沿 x 方向的位移为 $x_1(Z, T) = X_1(z)T(t)$, 将其与式(11)

带入式(12)中, 由于 $\omega^2 = \frac{\ddot{T}}{T}$, 可得:

$$EI \frac{d^4 X_1(z)}{dz^4} = - \omega^2 (\rho_0 F + \frac{2\rho_0}{X_1(z)} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} m_s a \text{cos} m_s z}{h m_s \text{ch} m_s a} \cdot \int_0^h X_1(z) \text{cos} m_s z dz - \frac{2\rho_0}{X_1(z)} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} n_s b \text{cos} n_s z}{h n_s \text{ch} n_s b} \cdot \int_0^h X_1(z) \text{cos} n_s z dz) X_1(z) = 0 \quad (13)$$

若令

$$m(z) = \frac{1}{X_1(z)} [2\rho_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} m_s a \text{cos} m_s z}{h m_s \text{ch} m_s a} \cdot \int_0^h X_1(z) \text{cos} m_s z dz - 2\rho_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \text{sh} n_s b \text{cos} n_s z}{h n_s \text{ch} n_s b} \cdot \int_0^h X_1(z) \text{cos} n_s z dz] \quad (14)$$

与无水情况梁弯曲自由振动方程对比, 上式相当于动水压力转化成沿塔体高度变化的附加质量, 则式(13)变为:

$$EI \frac{d^4 X_1(z)}{dz^4} - \omega^2 (\rho_0 F + m(z)) X_1(z) = 0 \quad (15)$$

同理, 设 $x_2(z, t) = X_2(z)T(t)$, 可知进水塔在 $h-H$ 段塔体弯曲振动方程为:

$$EI \frac{d^4 X_2}{dz^4} - \omega^2 \rho_0 F X_2(z) = 0 \quad (16)$$

2.5 塔体 $0-h$ 和 $h-H$ 段振动方程的求解

令 $k^4 = \frac{\rho_0 F \omega^2}{EI}$, 有 $\frac{\omega^2}{EI} = \frac{k^4}{\rho_0 F}$, 式(13)可变换为:

$$\frac{d^4 X_1(z)}{dz^4} - k^4 X_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} [R_{1s} G_{1s} \text{cos} m_s z + R_{2s} G_{2s} \text{cos} n_s z] \quad (18)$$

式中:

$$X(z) = \begin{cases} X_{1,1}(z) + X_{1,2}(z) & (0 \leq z \leq h) \\ X_2(z) & (h \leq z \leq H) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} R_{1s} = \frac{2k^4 Q \cdot 2shmsa}{\rho_0 \cdot Fhm_s chm_s a} & R_{2s} = \frac{2k^4 Ql \cdot 2shnsb}{\rho_0 \cdot Fhn_s chn_s b} \\ G_{1s} = \int_0^h X(z) \cos m_s z dz & G_{2s} = \int_0^h X(z) \cos n_s z dz \end{cases} \quad (19)$$

进水塔的振动方程由 0-h 和 h-H 两段组成, 分别为各自方程的解。即:

$$X(z) = \begin{cases} D_1 \cos kz + D_2 \sin kz + D_3 chkh + D_4 shkh + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{R_{1s}}{m_s^4 - k^4} \cdot G_{1s} \cos m_s z + \frac{R_{2s}}{n_s^4 - k^4} \cdot G_{2s} \cos n_s z \right] & (0 \leq z \leq h) \\ D'_1 \cos kz + D'_2 \sin kz + D'_3 chkh + D'_4 shkh & (h \leq z \leq H) \end{cases} \quad (21)$$

式中: $X_{1,1}(z)$ 为 0-h 段对应齐次方程的通解, $X_{1,2}(z)$ 为对应非齐次方程的特解; $X_2(z)$ 为 h-H 段对应齐次方程的通解。

经过求解和换算得到振型方程:

塔体 0-h 和 h-H 段的连接条件:

$$\begin{cases} X_{11}|_{z=h} = X_{21}|_{z=h} & X'_{11}|_{z=h} = X'_{21}|_{z=h} \\ X''_{11}|_{z=h} = X''_{21}|_{z=h} & X\hat{1}_1|_{z=h} = X\hat{1}_2|_{z=h} \end{cases}$$

塔体两端的边界条件:

$$\begin{cases} \text{在 } z=0, \text{ 位移和转角为零 } & X(0) \quad X'(0) = 0 \\ \text{在 } z=H, \text{ 弯矩和剪力为零 } & X''(0) \quad X\hat{1}(0) = 0 \end{cases}$$

将式(18)分别带入以上边界条件和连接关系, 可以得到 8 个关于 $D_i, D'_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的齐次线性方程组, 组成的方程组中, 常数 $D_i, D'_i (i=1, 2, 3, 4)$

不能全为零, 因此方程组中系数矩阵所对应的行列式等于零, 得到的频率方程式属超越方程, 使用非线性代数方程寻根算法编制程序后可以求得各阶固有频率参数 $\alpha_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 及方程系数之间的比值, 带入式(18)可得到各阶振型函数和振型图, 给定塔高度、水体高度后可得到结构的振型函数, 带入具体的惯性矩、均布质量和弹模参数则可以得到结构的振动频率。由于篇幅有限, 方程组不再列出, 其系数不为 0 的行列式为:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kh & \sinh k - shkh & chkh & -\cos kh & -\sinh k & -chkh & -shkh \\ -(k \sinh k + \sigma^{(1)}) & k(\cos kh - chkh) - \sigma^{(2)} + \sigma^{(4)} & kshkh - \sigma^{(3)} & k \sinh k & -k \cos kh & -kshkh & -kchkh \\ -\cos kh & -\sinh k - shkh & chkh & \cos kh & \sinh k & -chkh & -shkh \\ k^3 \sinh k + \Sigma^{(1)} & -k^3 \cos kh - k^3 chkh - \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(4)} & k^3 shkh - \Sigma^{(3)} & -k^3 \sinh k & k^3 \cos kh & -k^3 shkh & -k^3 chkh \\ 0 & 0 & 0 & -\cos kH & -\sinh H & chkh & shkh \\ 0 & 0 & 0 & \sinh H & -\cos kH & shkh & chkh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{bmatrix} = 0$$

其中:

$$\begin{cases} I_{1s} = \frac{1}{m_s^2 - k^2} \cdot \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \cos kh \right] \\ I_{2s} = \frac{1}{m_s^2 - k^2} \cdot \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \sinh k - k \right] \\ I_{3s} = \frac{1}{m_s^2 + k^2} \cdot \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} chkh \right], \\ I_{4s} = \frac{1}{m_s^2 + k^2} \cdot \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} chkhk \right] \end{cases} \quad E_{1s} = \frac{R_{1s}}{\left[\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right]^4 - k^4}, \quad E_{2s} = \frac{R_{2s}}{\left[\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right]^4 - k^4}$$

$$F_{1s} = \frac{E_{1s}}{1 - \frac{h}{2} E_{1s} - \frac{h}{2} E_{2s}}, \quad F_{2s} = \frac{E_{2s}}{1 - \frac{h}{2} E_{1s} - \frac{h}{2} E_{2s}}, \quad F = 2bd - 2ac, \quad m_s = \frac{(2s-1)\pi}{2h}$$

$$\alpha = \frac{1 + \sum_{s=1}^{\infty} (F_{1s} I_{1s} + F_{2s} I_{1s})}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} (F_{1s} I_{3s} + F_{2s} I_{3s})} \quad \beta = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} (F_{1s} I_{2s} + F_{2s} I_{2s} - F_{1s} I_{4s} - F_{2s} I_{4s})}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} (F_{1s} I_{3s} + F_{2s} I_{3s})}$$

$$\sigma^{(i)} = \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^{s-1} m_s^3 F_{1s} I_{is} + (-1)^{s-1} n_s^3 F_{2s} I_{is}] \quad \Sigma^{(i)} = \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^{s-1} m_s^3 F_{1s} I_{is} + (-1)^{s-1} n_s^3 F_{2s} I_{is}]$$

$$R_{1s} = \frac{2k^4 Q \cdot 2shmsa}{\rho Fhm_s chm_s a} \quad R_{2s} = \frac{2k^4 Ql \cdot 2shnsb}{\rho Fhn_s chn_s b}$$

3 本文方法结果分析和讨论

带入具体数据后便能够得到计算结果, 为分析本文解析方法适用范围, 同时使用有限元软件进行

数值计算比对分析。以某实际工程的洪洞进水塔为依据, 提取其主要特征尺寸, 得到各具体参数如下(符号代表的含义见图 1): 进水塔塔高度 $H = 81 \text{ m}$, 塔体横截面尺寸: $a = 2.34 \text{ m}$, $b = 6.78 \text{ m}$, $c = 7 \text{ m}$,

$d = 14 \text{ m}$; 塔体材料弹性模量 $E = 2.8 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 塔体密度 $\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^3$ 。塔内外水位高度相同均为 $h = 75 \text{ m}$, 水的密度为 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 水的体积弹性模量取一个大气压下 20 摄氏度时值, 为 $2.18 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。分别建立无水进水塔模型(见图 2(a))和内外有水模型(见图 2(b)), 进水塔塔体采用三维实体单元, 水体采用三维流体单元, 程序会在结构和流体接触面自动设置耦合边界。进水塔底部完全固结, 塔体周围的流体范围为四倍塔体宽度或长度的尺寸, 内外流体表面均设置自由表面。

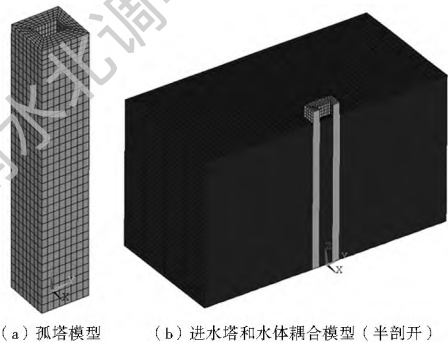


图 2 进水塔有限元模型

Fig. 2 The finite element model of intake tower

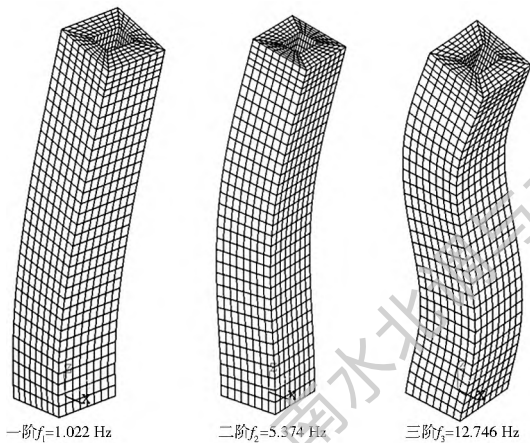


图 3 有限元塔体与水体耦合模型塔的前三阶振型和频率

Fig. 3 The first three order bending vibration mode and frequency of the model with FSI by using finite element method

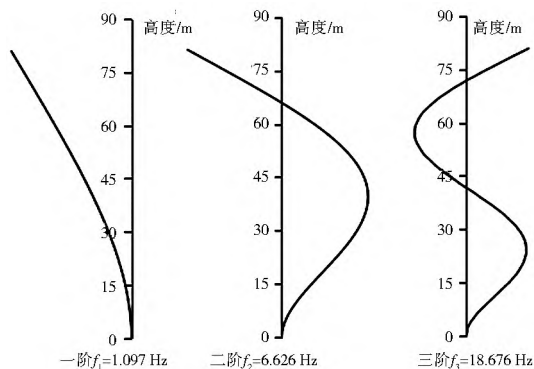


图 4 速度势法有水时进水塔前三阶振型和频率

Fig. 4 The first three order vibration mode and frequency of the intake tower with water by using velocity potential method

表 1 有限元法和本文方法求得频率对比

Tab. 1 Comparison of the FEM and the method in this paper of the vibration frequency Hz

	孤塔模型			塔水耦合模型		
	1阶	2阶	3阶	1阶	2阶	3阶
速度势法	1.216	7.622	21.343	1.097	6.626	18.676
有限元法	1.179	6.333	15.088	1.022	5.374	12.746
两者差异	3.1%	20.4%	41.5%	7.3%	23.3%	46.5%

注: 误差 = (速度势法值 - 有限元法值) / 有限元法值

图 3 为塔水耦合有限元模型进水塔在 XZ 平面弯曲前三阶振型和频率值。图 4 为速度势法求得的进水塔前三阶弯曲振型和频率值。从有限元分析的结果来看, 本文公式推导得到的振型均能在有限元孤塔和塔水耦合模型中塔的找到对应振型, 两者振型相似。速度势法和有限元法得到的孤塔模型振型频率都大于塔水耦合模型, 1 阶降低分别为 9.78%, 13.31%, 可见水的存在对进水塔振动频率有显著影响, 计算中不可忽略水的作用。

由表 1 可以看出, 有限元分析得到的塔体各阶对应频率均小于速度势法求得值, 并且随着阶数的增大, 两者差别越来越大。其中 1 阶频率两种方法差异在 5% 左右, 可认为速度势法基本能得到满意的基本振型。分析原因, 两种方法具有以下不同: 速度势法将结构简化成平面内梁单元模型, 其实质是采用欧拉梁理论, 假设梁只有弯曲变形, 而梁对剪切变形完全刚性, 即忽略了剪切变形和转动惯量, 这对于梁截面尺寸远小于长度的梁(高跨比 $< 1/10$)来说, 不会引起显著的误差。以上例子中, 梁的长度与高度之比为 $H/2b = 5.97$, 此比值的梁属于深受弯梁, 此时梁内的横向剪切力所产生的剪切变形将引起梁的附加挠度, 并使原来垂直于中性面的截面变形后不再与中性面垂直, 与假定有所不同。同时, 速度势法将水体处理成与振型函数有关的附加质量, 改变梁沿高度的质量分布, 水体和塔体的相互作用未能完全考虑, 有限元塔水耦合模型中, 结构和流体的相互作用可以体现。

为验证高宽比对结果的影响, 在前述实例的基础上, 将塔高度提高到 135.6 m (10 倍截面宽度) 和 271.2 m (20 倍截面宽度), 水位与前述例子的水位比例相当, 分别为 125 m 和 250 m。其它参数不变。表 2 和表 3 列出分别列出了有限元法和速度势法求的前三阶振动频率。

由表 2、表 3 可以看出, 当塔高增加到截面宽度 10 倍时, 速度势法和有限元法计算的频率更加接近, 1 阶频率相差 0.8%。二阶和三阶相差在 20% 以内。当增加到截面宽度 20 倍时, 二阶和三阶频率

相差不到 10%。

表 2 有限元法和本文方法求得频率对比(塔高 135.6 m)

Tab. 2 Comparison of the FEM and the method in this paper of the vibration frequency ($H = 135.6 \text{ m}$) Hz

	孤塔模型			塔水耦合模型		
	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶
速度势法	0.434	2.718	7.612	0.389	2.389	6.635
有限元法	0.437	2.563	6.583	0.365	2.143	5.542
两者差异	-0.8%	6.1%	15.6%	6.6%	11.5%	19.7%

注: 误差 = (速度势法值 - 有限元法值) / 有限元法值

表 3 有限元法和本文方法求得频率对比(塔高 271.2 m)

Tab. 3 Comparison of the FEM and the method in this paper of the vibration frequency ($H = 271.2 \text{ m}$) Hz

	孤塔模型			塔水耦合模型		
	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶
速度势法	0.108	0.680	1.903	0.097	0.596	1.651
有限元法	0.111	0.682	1.863	0.094	0.570	1.547
两者差异	-2.1%	-0.4%	2.1%	2.9%	4.5%	6.7%

注: 误差 = (速度势法值 - 有限元法值) / 有限元法值

由以上分析可以看出,结构的高宽比大于 10 时,计算结果较准确。有限元法中模型节点存在平动、扭转等自由度,截面可变形,在高阶振型时其它方向质量参与复杂,这是两种方法高阶振型差异较多的原因。

4 结论

本文以进水塔结构为研究对象,抓住其主要受力特点和边界条件,将其简化成内外充水的悬臂梁结构,在前人研究基础上将圆柱型式水中结构的弯曲自由振动算法引用到内空矩形截面的进水塔结构上,经过严密的推导求得了进水塔的振动频率和振型,可以得到如下结论:

(1) 进水塔可简化为悬臂梁结构,采用流体速度势法求解其水中弯曲自由振动。速度势法虽然简化假设较多,但不失为研究类似结构提供一种新的思路。经过实例分析和探讨,可知与有限元法相比,速度势法求解得到的 1 阶频率接近,高宽比大于 10 时,二三阶频率开始接近。但实际进水塔高宽比多在 10 以内,速度势法求得的 1 阶频率可以作为参考。

(2) 推导得到了水-进水塔耦联体系振型函数精确解和频率方程,其表达式较为复杂,编制数学求解程序能够快速求解得到结果,相比于有限元法省去复杂建模、计算和处理过程,计算过程明确,结果有一定参考价值。

(3) 从推导过程可以看出,速度势法求解结构振动时将水的动水压力作用转化成与振型有关的质量

附加于结构之上,增大了结构的分布质量,引起了自振频率的降低,此方法为水体对结构的单向流固耦合。

参考文献(References):

- [1] 林继庸. 水工建筑物(第 5 版)[M]. 北京:中国水利电力出版社,2013. (LIN Jiyong. Hydraulic structures (Fifth Edition) [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2013 (in Chinese))
- [2] Housner, G. W. 1957. Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1957, Vol 47, pp 15-35.
- [3] 郑哲敏, 马宗魁. 悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动[J]. 力学学报, 1959, 3(2): 111-119. (ZHENG Zhe-min, MA Zong-kui. Vibration of cantilever beam placed against water with free surface[J]. Acta Mechanica Sinica [J]. 1959, 3(2): 111-119. (in Chinese))
- [4] Housner G M. The dynamic behavior of water tanks[J]. Bull. Seism. Soc. Am. 1963. 53(2): 381-387.
- [5] Moiseev N N. Introduction to the theory of oscillations of liquid containing bodies[J]. Advances in Applied Mechanics, 1964, 8: 233-289. DOI: 10.1007/BF02128917
- [6] Khalak A, Williamson C H K. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping[J]. Journal of Fluids & Structures, 1996, 10(5): 455 - 472. DOI: 10.1006/jfls.1996.0031
- [7] 张悉德. 部分埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动[J]. 应用数学和力学, 1982, 7, 3(4): 537-546. (ZHANG Xi de. Free bending vibration of circular column partially submerged in water [J]. Applied Mathematics and Mechanics; 1982, 7, 3(4): 537-546. (in Chinese))
- [8] 张悉德. 部分埋入水中椭圆柱体弯曲自由振动[J]. 应用数学和力学, 1986, 9, 7(9): 813-820. (ZHANG Xi de. Free bending vibration of elliptic cylinder partially submerged in water [J]. Applied Mathematics and Mechanics; 1986, 9, 7(9): 813-820. (in Chinese))
- [9] 周叮. 贮液椭圆筒在水中的横向弯曲自由振动[J]. 应用力学学报, 1989, 6(4): 83-90. (ZHOU Ding. Free transverse vibrations of elliptic reservoir submerged in water [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1989, 6(4): 83-90. (in Chinese))
- [10] 周叮. 贮液圆筒在水中的弯曲自由振动[J]. 应用力学学报, 1990, 11(5): 439-446. (ZHOU Ding. The free bending vibration of cylindrical tank partially filled with liquid and submerged in water [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1990, 11(5): 439-446. (in Chinese))
- [11] 朱永谊, 翁智远. 考虑液面晃动和液体可压缩影响时的柱水耦联振动[J]. 力学学报, 1989, 6(6): 657-667. (ZHU Yongyi, WEN Zhiyuan. The coupled vibration between column and water considering the effects of surface wave and compressibility of water [J]. Acta Mechanica Sinica, 1989, 6(6): 657-667. (in Chinese)) doi: 10.6052/0459-1879-1989-6-1989-355
- [12] 周叮. 考虑表面波的贮液圆筒的弯曲自由振动[J]. 振动与冲击, 1989(3): 32-36. (ZHOU Ding. Free bending vibration of

- cylindrical tank partially filled with liquid in the consideration of surface wave[J]. Journal of Vibration and Shock, 1989(3): 32-36. (in Chinese)
- [13] 周叮. 计及表面波的圆环贮液容器的弯曲自由振动[J]. 应用力学学报, 1994, 15(9): 789-796. (ZHOU Ding. Free bearing vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in the consideration of surface wave[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1994, 15(9): 789-796. (in Chinese))
- [14] 陈怡然, 白焱. 考虑表面波部分潜入水中椭圆柱体的扭振分析[J]. 河北工业大学学报, 1992, 4(4): 78-83. (CHEN Yiran, BAI Ye. The Analysis of Torsional Vibration of Elliptic Column partially Submerged in Water with Surface Waves[J]. Journal of Hebei University of Technology, 1992, 4(4): 78-83. (in Chinese))
- [15] 董育坚. 矩形截面进水塔的地震动水压力计算[J]. 水利学报, 1982(1): 47-52 (DONG Yujian. Calculation of seismic hydrodynamic pressure in the inlet of the rectangular cross section [J]. Journal of hydraulic engineering, 1982(1): 47-52 (in Chinese))
- [16] 黄虎, 李异, 张建伟. 基于流固耦合的高耸进水塔动水压力分布研究[J]. 水力发电, 2012, 38(6), 30-33 (HUANG Hu, LI Yi, ZHANG Jiarwei. Study on hydrodynamic pressure distribution of high intake tower based on fluid structure interaction[J]. Water Power, 2012, 38(6), 30-33 (in Chinese)) DOI: 10.3969/j.issn.0559-9342.2012.06.009
- [17] (美)R. 克拉夫, J. 彭津. 结构动力学[M]. 第二版(修订版). 北京: 高等教育出版社, 2006. (R. W. Clough and J. Penzien. Dynamics of Structures [M]. Second Edition (Revised Edition). Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [18] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005. 1. (LIU Jingbo, DU Xiuli. Dynamics of structures [M]. Beijing: China Machine Press, 2005. 1 (in Chinese))
- [19] 谭晓晶. 大型储液罐流固耦合地震反应分析[D]. 中国地震局工程力学研究所, 2007. (TAN Xiaojing. Seismic response analysis of large liquid storage tank based fluid solid coupling [D]. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, 2007 (in Chinese))
- [20] 孔珑. 工程流体力学(第四版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 2014. 2 (KONG Long. The engineering fluid mechanics (Fourth Edition)[M]. Beijing: Chinese Power Press, 2014. 2 (in Chinese))