

DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdkj.2020.0102

宁利中, 宁碧波, 田伟利, 等. 突扩式水跃共轭水深的简化解[J]. 南水北调与水利科技(中英文), 2020, 18(5): 139-143. NING L Z, NING B B, TIAN W L, et al. A simplified solution of the conjugated depth of abruptly expanding hydraulic jump[J]. South-to-North Water Transfers and Water Science & Technology, 2020, 18(5): 139-143. (in Chinese)

突扩式水跃共轭水深的简化解

宁利中¹, 宁碧波², 田伟利³, 渠亚伟¹

(1. 西安理工大学 省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室, 西安 710048;
2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 上海大学 建筑系, 上海 200444)

摘要:分析突扩水跃的水力特性, 给出水跃方程的简化解。在分析突然扩散式水跃段流态的基础上对回流水深作出假设, 考虑水跃扩散比对回流水深的影响, 运用动量守恒定律建立突然扩散式水跃方程。通过级数展开方法, 推导出突然扩散式水跃方程的显式简化解, 并给出有关参数的经验公式。突扩比 $\beta=1.0$ 时简化解与试验结果的平均误差为 1.924%, 在 $3.0 < Fr_1 < 9.0$ 范围内二元水跃经典解与简化解误差随着水流弗劳德数 Fr_1 的增加而减小, 最大误差小于 3.001%, 简化解能够与试验和二元水跃经典解吻合很好。在不同扩散比情况下, 简化解与试验结果的平均误差为 5.511%, 说明具有良好的精度。因此, 可以应用它进行泄水建筑物下游水力计算。

关键词:突扩式水跃; 简化解; 回流水深; 动量守恒理论

中图分类号: TV135.2 文献标志码: A 开放科学(资源服务)标志码(OSID):



A simplified solution of the conjugated depth of abruptly expanding hydraulic jump

NING Lizhong¹, NING Bibo², TIAN Weili³, QU Yawei¹

(1. State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

3. Department of Architecture, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The simplified solution of the hydraulic jump equation is provided by analyzing the hydraulic characteristics of a hydraulic jump in an abruptly expanding channel. Based on analyzing the flow pattern of a hydraulic jump in an abruptly expanding channel, a hypothesis is made for the depth in the back-flow region considering the effect of the abruptly expanding ratio on the depth in the back-flow region. The law of momentum conservation is used to establish the hydraulic jump equation in an abruptly expanding channel. Through the approximate treatment, the explicit simplified solution of the hydraulic jump equation in an abruptly expanding channel is derived. An empirical formula for the related parameters is given. The average error between the simplified solution and the experimental result is 1.924% at an abruptly expanding ratio when $\beta=1.0$. The error between the classical solution and the simplified solution in the range of $3.0 < Fr_1 < 9.0$ decreases with the increase of the flow Froude number and the maximum error is less than 3.001%. The simplified solution well agrees with the experiment and the classical solution of 2D hydraulic jump. The average error of the simplified solution and the experimental result under different abrupt expanding ratio is 5.511%, indicating good accuracy. Therefore, it can be applied to carry out the hydraulic calculation in the downstream of the outlet structure.

Key words: abruptly expanding hydraulic jump; simplified solution; depth in back-flow region; momentum conservation theory

收稿日期: 2019-11-07 修回日期: 2020-03-12 网络出版时间: 2020-04-13

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/13.1430.tv.20200413.1223.006.html>

基金项目: 国家自然科学基金(10872164); 西北旱区生态水利国家重点实验室基金(2017ZZKT-2)

作者简介: 宁利中(1961—), 男, 陕西西安人, 教授, 博士, 主要从事流体力学和高速水力学研究。E-mail: ninglz@xaut.edu.cn

水跃消能即底流消能是泄水工程中广泛采用的一种主要的消能形式^[1-3],其特性已经被深入研究^[4-8]。在实际工程中消力池可以根据地形条件布置成扩散式,可以提高消能效果。同时,这也要求水利工作者对扩散式水跃消能进行研究,提供设计使用的水力计算方法。关于逐渐扩散式^[9-13]和突然扩散式^[13-22]的水力计算已经有了一些研究成果。突然扩散式水跃是扩散式水跃的一种,对它的研究需要解决共轭水深计算、水跃长度计算、消能率计算及其流态控制等问题。突然扩散式水跃的流态也分为远驱式水跃、淹没水跃和自由水跃。自由水跃的研究在水力设计中具有重要地位,其中共轭水深计算方法是水力计算中一个重要问题。目前的研究方法主要有:根据水力学试验给出水力计算的公式;根据动量原理建立共轭水深的基本方程,然后求解共轭水深的水跃方程,获得共轭水深。后一种方法中的力学原理和概念清楚,需要通过试验确定某些参数。

在分析突然扩散式水跃段的流态的基础上对回流水深作出假设,考虑水跃扩散比对回流水深的影响,通过试验确定回流水深计算式中有关参数,并给出参数经验公式。运用动量守恒定律建立突然扩散式水跃共轭水深的水跃方程。通过级数展开的方法推导出突然扩散式水跃方程共轭水深的显式简化解。将水跃共轭水深简化解计算结果与已有试验资料进行对比,结果表明:突然扩散式水跃共轭水深的简化解与试验能很好地吻合,因此可以应用于泄水建筑物下游的水力计算。

1 突扩式水跃共轭水深的简化解

1.1 突扩式水跃方程

平底突扩渠道中的水跃可分为 4 类,即“R”型水跃、“S”型水跃、“T”型水跃和经典水跃。本文讨论的是“S”型水跃,是指水跃刚好发生在突扩断面的情况。突然扩散式水跃的流动示意图见图 1。

假设图 1 所示的水跃跃首、跃末断面和水跃始端端墙断面为渐变流,符合静水压力分布。对断面 1-1 和断面 2-2 之间的水流运用动量方程

$$\frac{1}{2}\rho g b h_1^2 + \frac{1}{2}\rho g (B-b) h_3^2 + \frac{1}{2}\rho g B h_2^2 = \rho Q v_2 - \rho Q v_1 \quad (1)$$

式中: Q 为通过流量; ρ 为流体密度; g 为重力加速度; h_1 、 h_2 分别为跃首、跃末水深; h_3 为水跃始端断面端墙水深; b 、 B 分别为跃首、跃末明渠宽度; v_1 、 v_2 分别为跃首、跃末流速。

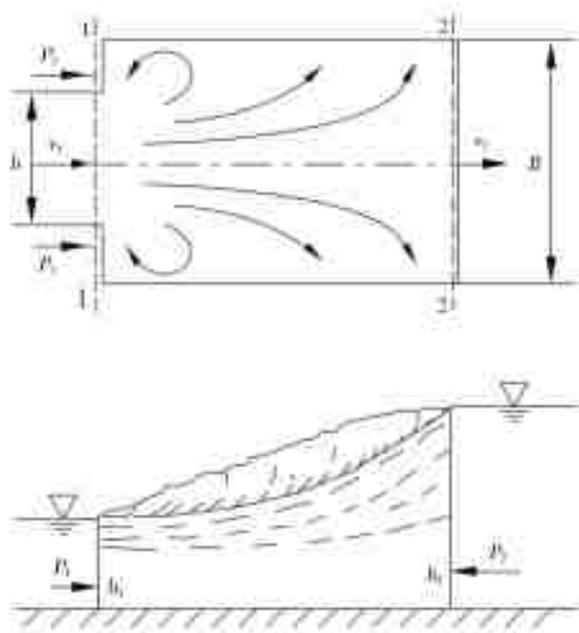


图 1 突扩式水跃示意图

Fig. 1 Sudden expansion water jump

依靠水跃始端端墙断面回流平均水深 h_3 确定其断面压力。一般情况下突扩两侧会形成回流旋涡,本研究讨论的情况为回流旋涡存在的情况。回流平均水深 h_3 在跃首水深 h_1 和跃末水深 h_2 之间变化。关于回流水深,前人有许多假定,都将回流水深 h_3 写成跃首水深 h_1 和跃末水深 h_2 的不同函数关系式,没有考虑突扩比 $\beta=B/b$ 的影响。本研究在回流水深的关系式中引入了考虑突扩比影响的系数 α ,回流平均水深 h_3 为

$$h_3^2 = (h_1^2 + \alpha h_2^2) \quad (2)$$

式中: α 表示随着扩散比变化的系数。

将式(2)代入式(1),考虑 $\frac{Q^2}{g b^2 h_1^3} = Fr_1^2$ 的关系,得

$$(\beta^2 + \alpha\beta - \alpha\beta^2)\eta^3 - (2\beta Fr_1^2 + \beta^2)\eta + 2Fr_1^2 = 0 \quad (3)$$

式中: β 为扩散比; Fr_1 为水流弗劳德数; η 为共轭水深比, $\eta=h_2/h_1$ 。式(3)为突扩式水跃共轭水深方程。式(3)应用于图 1 的流态情况。

1.2 突扩式水跃共轭水深的简化解

对方程(3)做数学处理,以获得简化解。整理变形形式(3),可以得到

$$\eta^3 - \left(\frac{2Fr_1^2 + \beta}{\beta - \alpha(\beta - 1)}\right)\eta + \frac{2Fr_1^2}{\beta^2 - \alpha(\beta - 1)\beta} = 0 \quad (4)$$

假定式(4)中 $P = \frac{2Fr_1^2}{\beta - \alpha(\beta - 1)}$,

$R = \frac{\beta}{\beta - \alpha(\beta - 1)}$,式(4)可简化为

$$\eta^3 - (P + R)\eta + \frac{P}{\beta} = 0 \quad (5)$$

对式(5)作简化处理。式(5)变形,得

$$\eta^2 = (P+R) - \frac{P}{\beta\eta} \quad (6)$$

对式(6)两边开平方,得

$$\eta = \sqrt{P+R} \sqrt{1 - \frac{P}{\beta(P+R)\eta}} \quad (7)$$

由于 $\frac{P}{\beta(P+R)\eta} < 1.0$, 则对式(7)右边第二个根

式由级数展开,可以得到

$$\sqrt{1 - \frac{P}{\beta(P+R)\eta}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{P}{\beta(P+R)\eta} + \dots \quad (8)$$

将级数展开的式(8)代入式(7),得

$$\eta = \sqrt{P+R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{P}{\beta(P+R)\eta} \right) \quad (9)$$

整理变形式(9),有

$$\eta^2 - \sqrt{P+R}\eta + \frac{1}{2} \frac{P}{\beta\sqrt{P+R}} = 0 \quad (10)$$

求解一元二次方程式(10),有

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{P+R} + \sqrt{P+R - \frac{2P}{\beta\sqrt{P+R}}} \right) \quad (11)$$

式(11)右边最后一项可以变为

$$\sqrt{P+R - \frac{2P}{\beta\sqrt{P+R}}} = \sqrt{P+R} \sqrt{1 - \frac{2P}{\beta\sqrt{(P+R)^3}}} \quad (12)$$

对式(12)右边第二个根式用级数展开,有

$$\sqrt{1 - \frac{2P}{\beta\sqrt{(P+R)^3}}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{P}{\beta\sqrt{(P+R)^3}} - \dots \quad (13)$$

考虑式(13)、(12)后,式(11)变为

$$\eta = \sqrt{P+R} - \frac{P}{2\beta(P+R)} \quad (14)$$

将 P, R 的定义式代入式(14),得

$$\eta = \sqrt{\frac{2Fr_1^2 + \beta}{\beta - \alpha(\beta - 1)}} - \frac{Fr_1^2}{(2Fr_1^2 + \beta)\beta} \quad (15)$$

以上为突扩式水跃共轭水深的简化解。为了获得便于工程应用的显示解,经过多次运用泰勒级数展开得到简化解。简化解与精确解之间存在误差,本文以简化解与试验数据的比较来判断简化解的精度。

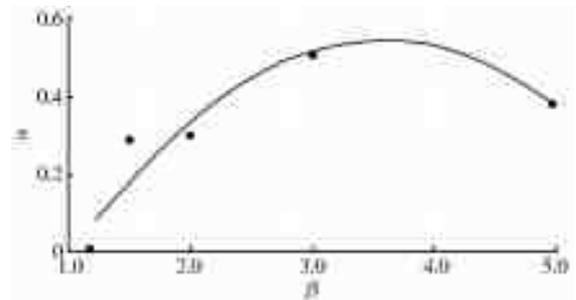


图2 参数 α 随着扩散比的变化
Fig. 2 Variation of the parameter α with abrupt expansion ratio β

2 参数 α 的确定

根据回流平均水深 h_3 , 跃首水深 h_1 , 跃末水深 h_2 的试验结果^[17,19], 对其进行分析, 参数 α 的变化关系式见图 2。其方程为

$$\alpha = -0.083 2\beta^2 + 0.595\beta - 0.522 4 \quad (16)$$

3 简化解(15)与试验的比较

文献[17,19]的试验是在矩形断面突然扩大渠道中进行的,其边界条件与图 1 所示体形一致。分析简化解与文献[17,19]试验之间的误差如下。

(1)图 3(a)是 $\beta=1.0$ 时,等宽度情况下,方程简化解(15)计算的二元水跃的共轭水深比 η_c 与试验获得的二元水跃共轭水深比 η_e 的比较,试验数据落在一条直线上。计算值与试验结果的平均误差为 1.924%,最大误差为 3.964%,试验结果与计算结果一致。运用经典的二元水跃的共轭水深比计算式^[8]计算不同水流佛氏数 Fr_1 时,结果与方程简化解(15)计算结果比较,见表 1,在 $3.0 < Fr_1 < 9.0$ 的范围内,误差随着水流佛氏数 Fr_1 的增加而减小,最大误差发生在 $Fr_1=3.0$ 时,其值小于 3.001%。两者的计算结果吻合较好。说明 $\beta=1.0$ 时,方程简化解(15)具有良好的精度。

表 1 $\beta=1.0$ 时简化解与二元水跃经典解的比较

Tab. 1 Comparison between the simplified solution at $\beta=1.0$ and the classical solution of 2D hydraulic jump

Fr_1	3.0	3.5	4.0	6.0	8.0	9.0
简化解(15)	3.885	4.569	5.260	8.051	10.862	12.270
经典解	3.772	4.475	5.179	8.000	10.825	12.238
误差/%	3.001	2.110	1.560	0.636	0.341	0.265

(2)图 3(b)至(f)是不同扩散比情况下方程简化解(15)计算的水跃共轭水深比 η_c 与试验得到水跃共轭水深比 η_e 的比较,试验数据落在直线上下。在 $1.2 \leq \beta \leq 5.0$ 的范围内,计算值与试验结果的平均误差为 5.511%,最大误差是 25.713%,试验结果与计算结果吻合良好。

(3)不同扩散比情况下,方程简化解(15)计算水跃共轭水深比 η_c 与试验得到的水跃共轭水深比 η_c 误差比较,见表 2。平均误差的最大值和最大误差均发生在 $\beta=3.0$ 情况下,平均误差最大值为 8.587%。说明在 $\beta=3.0$ 情况下水跃流动最为复杂。另一方面,在相同条件下文献[17]与文献[19]

中的试验数据之间本身也存在误差。对计算的水跃共轭水深比 η_c 与试验获得的水跃共轭水深比 η_c 资料进行相关分析,获得斯皮尔曼相关系数。结果表明:不同扩散比情况下的相关性显著,简化解与试验结果吻合良好。在 $1.2 \leq \beta \leq 5.0$ 的范围内,方程(3)是合理的,简化解(15)是适合的。

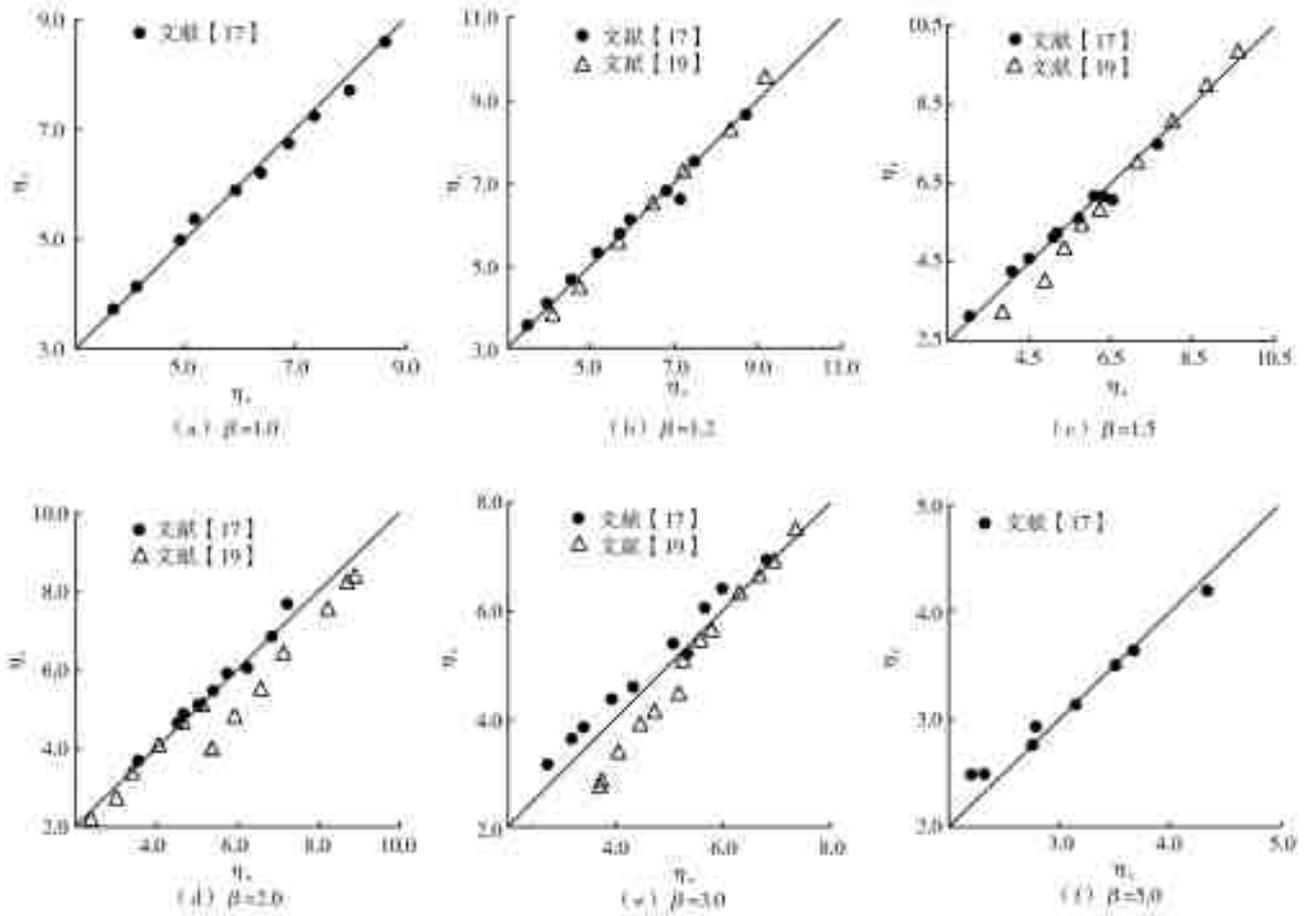


图 3 不同突扩比 β 情况下简化解 η_c 与试验的共轭水深比 η_c 的比较

Fig. 3 Comparison between the simplified solution η_c at different β and the experimental conjugate depth ratio η_c

表 2 在不同突扩比 β 情况下简化解与试验值的误差

Tab. 2 Error of the simplified solution and the experimental value with different β

β	1.2	1.5	2.0	3.0	5.0
平均误差/%	2.435	4.588	6.093	8.587	3.729
最大误差/%	8.279	18.099	25.478	25.713	12.775
相关系数	0.988	0.979	0.950	0.952	0.976

(4)在 $1.2 \leq \beta \leq 5.0$ 的范围内的 90 组实验数据中:有 54 组水跃方程简化解与试验结果的误差小于 5%,占试验资料的 60%;有 20 组误差大于 5%且小于 10%,占试验资料的 22%;有 13 组误差大于 10%且小于 20%,占试验资料的 14%;仅有 3 组误差大于 20%且小于 30%,占试验资料的 3%。这说明水跃方程简化解与试验结果的大部分误差小于 5%,具有良好的精度。

4 结论

(1)在分析突然扩散式水跃段流态的基础上对回流水深作出假设,考虑水跃扩散比对回流水深的影响,并给出有关参数的经验公式。运用动量守恒定律建立突然扩散式水跃共轭水深的水跃方程。通过级数展开的方法,推导出突然扩散式水跃方程共轭水深的显式简化解。

(2)在 $\beta=1.0$ 时,方程简化解(15)计算的二元水跃的共轭水深比 η_c 与实验得出的二元水跃的共轭水深比 η_c 的比较说明,计算值与试验结果的平均误差为 1.924%,最大误差为 3.964%,试验结果与计算值是一致的。另外,运用二元水跃经典解与方程简化解(15)计算结果比较说明,在 $3.0 < Fr_1 < 9.0$ 的范围内,误差随着水流弗劳德数 Fr_1 的增加而减

小,最大误差发生在 $Fr_1=3.0$ 时,其值小于 3.001% 。两者的计算结果吻合很好。显然,在 $\beta=1.0$ 时,方程简化解(15)具有良好的精度。

(3) 在不同扩散比情况下,方程简化解(15)计算的水跃共轭水深比 η_c 与试验获得的水跃共轭水深比 η_e 的比较说明,在 $1.2 \leq \beta \leq 5.0$ 的范围内,计算值与试验结果的平均误差为 5.511% ,最大误差是 25.713% ,试验结果与计算值吻合良好。在 90 组实验数据中,有 54 组水跃方程简化解与试验结果的误差小于 5% ,占实验资料的 60% ,说明水跃方程简化解与试验结果的大部分误差小于 5% ,具有良好的精度。

参考文献:

- [1] 张志昌,张巧玲. 明渠恒定急变流和渐变流水力特性研究[M]. 北京:科学出版社,2016.
- [2] 刘沛清. 现代坝工消能防冲原理[M]. 北京:科学出版社,2010.
- [3] 李建中,宁利中. 高速水力学[M]. 西安:西北工业大学出版社,1994.
- [4] 罗永钦. 突跌渐扩消力池体型优化及水力特性分析[J]. 水力发电学报,2016,35(2):61-66. DOI:10.11660/slfdx. 20160207.
- [5] 李连侠,廖华胜,刘德伟,等. 进口形式对浅水垫消力池水跃特性的影响[J]. 水力发电学报,2015,34(5):57-65.
- [6] 赵延风,王羿,王正中. 三角形明渠水跃共轭水深的近似解法[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版),2017,45(4):230-234. DOI:10.13207/j.cnki.jnwafu.2017.04.031.
- [7] 代述兵,刘韩生,杨吉健. 抛物线类渠道共轭水深的直接计算公式[J]. 水力发电学报,2015,34(5):88-94. DOI:10.1016/j.jeis.2008.06.009.
- [8] FINNEMORE E J,FRANZINI J B. Fluid mechanics with engineering applications[M]. 10th ed. Beijing:Tsinghua University Press,2003:460-468.
- [9] ABDELKAWI M K,JOHN A M. Radial hydraulic jump[J]. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1979, 105(9):1065-1078.
- [10] ABDELKAWI A M,Mc CORQUODALE J A. Simulation of the radial hydraulic jump[J]. Journal of Hydraulic Research, 1992, 30(2):149-164. DOI:10.1080/00221689209498931.
- [11] 于志忠. 矩形扩散水跃的计算方法[J]. 水利学报,1982,13(2):39-45. DOI:10.13243/j.cnki.slxb.1982.02.007.
- [12] 宁利中,宁碧波,田伟利,等. 矩形扩散水跃方程的近似解[J]. 西安建筑科技大学学报,2013,45(6):875-879. DOI:10.15986/j.1006-7930.2013.06.002.
- [13] HAGER W H. Hydraulic jump in non-prismatic rectangular channels[J]. Journal of Hydraulic Research, 1985,23(1):21-35. DOI:10.1080/00221688509499374.
- [14] ZARE H K,BADDOUR R E. Three-dimensional study of spatial submerged hydraulic jump[J]. Canada Journal of Civil Engineering, 2007, 34(9):1140-1148. DOI:10.1139/107-041.
- [15] 傅铭焕,郭曙啸,卢志男,等. 突扩式水跃跃后水深的分析与计算[J]. 长江科学院院报,2017,34(5):48-52. DOI:10.11988/ckyyb.20160187.
- [16] 傅铭焕,卢志男,惠祥明,等. 突扩式水跃跃长的计算公式推导与验证[J]. 长江科学院院报,2017,34(4):48-51. DOI:10.11988/ckyyb.20160088.
- [17] 卢士强. 两侧突然扩散水跃特性的试验研究[D]. 南京:河海大学,2000:44-46.
- [18] 卢士强,邹志业,程胜依. 突然扩散水跃共轭水深研究[C]//第十六届全国水动力学研讨会论文集. 北京:海洋出版社,2002:342-349.
- [19] RAJARATNAM N,SUBRAMANYA K. Hydraulic jumps below abrupt symmetrical expansions[J]. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1968, 94(2):481-504.
- [20] HASAN M R,MATIN M A. Experimental study for sequent depth ratio of hydraulic jump in horizontal expanding channel[J]. Journal of Civil Engineering, 2009,37(1):1-9.
- [21] BREMEN R,HAGER W H. T-jump in abruptly expanding channel[J]. Journal of Hydraulic Research, 1993,31(1):61-78.
- [22] HERBRAND K. The spatial hydraulic jump[J]. Journal of Hydraulic Research, 1973, 11(3):205-217. DOI:10.1080/00221687309499774.