



DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdtqk.2016.01.014

阳艾利, 黄国和, 孔祥铭, 等. 基于最大熵 Copula 方法的香溪河流域降雨-径流相关性分析[J]. 2016, 14(1): 84-89.

YANG Ai li, HUANG Guo he, KONG Xiang ming, et al. Correlation study of rainfall and runoff in Xiangxi River watershed using the Maximum Entropy Copula Method[J]. 2016, 14(1): 84-89. (in Chinese)

# 基于最大熵 Copula 方法的香溪河流域 降雨-径流相关性分析

阳艾利<sup>1</sup>, 黄国和<sup>1</sup>, 孔祥铭<sup>2</sup>, 郝振达<sup>3</sup>

(1. 厦门理工学院 环境科学与工程学院, 福建 厦门 361024; 2. 华北电力大学 区域能源系统优化教育部重点实验室, 北京 102206; 3. 中央财经大学 资产管理处, 北京 100081)

**摘要:** 基于 1991 年-2008 年香溪河流域降雨量和径流量资料, 将最大熵 Copula(MEC)方法应用于流域降雨-径流相关性分析中。结果表明: MEC 方法生成的边缘分布能够有效拟合降雨量和径流量的观测值, 且在边缘分布确定的过程中无需对线型进行假设, 以均值、标准差、偏度和峰度作为约束也能够很好的体现变量的统计特征; Gumbel-Hougaard Copula 函数对于降雨量和径流量联合分布的拟合效果较好; 香溪河流域降雨量和径流量存在上尾相关性, 这对防洪排涝有着重要的作用, 同时也为流域工程规划设计工作提供了参考依据。

**关键词:** 最大熵; Copula 函数; 香溪河流域; 降雨; 径流; 相关性; 联合分布

中图分类号: P343 文献标志码: A 文章编号: 1672-1683(2016)01-0084-06

## Correlation study of rainfall and runoff in Xiangxi River watershed using the Maximum Entropy-Copula Method

YANG Ai li<sup>1</sup>, HUANG Guo he<sup>1</sup>, KONG Xiang ming<sup>2</sup>, HAO Zhen da<sup>3</sup>

(1. School of Environmental Science and Engineering, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China;

2. MOE Key Laboratory of Regional Energy and Environmental Systems Optimization, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

3. Department of Assets Administration, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Based on the rainfall and runoff in Xiangxi River Watershed, this study applied a maximum entropy copula (MEC) method to investigate the relationship between the rainfall and runoff of watershed. Results show that: the generated marginal distributions of the rainfall and runoff can effectively fit the observed values without any hypothesis, and the statistical characteristics of random variables can be reflected well as the constraints of mean, standard deviation, skewness and kurtosis; Among all the Copula functions used, Gumbel hougaard copula showed the best effect of fitting generation the joint distribution of the rainfall and runoff; the upper tail dependence was observed between the rainfall and runoff in Xiangxi River Watershed, which not only can play a great role in flood and drainage control in Xiangxi River Watershed, but also provide a reference basis for watershed project planning and design.

**Key words:** maximum entropy; Copula; Xiangxi River Watershed; rainfall; runoff; correlation; joint distribution

收稿日期: 2015-08-21 修回日期: 2016-01-13 网络出版时间: 2016-02-27

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/13.1334.TV.20160227.1702.025.html>

基金项目: 福建省教育厅 A 类项目(JA15371); 厦门理工学院科学技术研究项目(YKJ3018R, XYK201419)

**Fund:** Supported in part by fuding(type A) from Fujian Educational Committee with Grant(JA15371); Science and Technology programs from Xiamen University of Technology with Grants(YKJ3018R, XYK201419)

作者简介: 阳艾利(1985-), 女, 湖南衡阳人, 讲师, 博士, 主要从事水文学水资源方面的研究。Email: yangaili@xmut.edu.cn

水文频率分析是认识径流变化规律的有效途径,生成单变量的分布函数是常用的频率分析方法<sup>[1-3]</sup>。由于各个水文变量之间存在相关性,单变量的水文频率分析通常不能解决实际问题,因此,有必要利用多变量水文频率分析方法研究水文变量间的相关性。在现有的多变量水文频率分析方法中, Copula 函数得到了广泛地关注和应用, Copula 函数可以用来构造多变量的相关结构和联合分布函数,具有较强的灵活性,被广泛应用到水文事件中<sup>[4-8]</sup>。

Copula 函数对边缘分布没有具体要求,各种样式的边缘分布都可以被用来建立联合分布,但是只有具备准确的边缘分布,利用 Copula 函数得到的联合分布才能够有效反映变量间的相关性。现有方法通常是对变量的线型进行假设来确定边缘分布,不一定能很好的体现径流量的统计特征。最大熵方法在样本资料的基础上,无需进行线型的假设,以样本资料的四个统计量(均值、标准差、偏度和峰度)为约束条件,生成径流量的概率分布。因此,可以将最大熵方法和 Copula 函数相结合,利用最大熵方法生成变量的边缘分布,体现其统计特征,然后利用 Copula 函数生成变量的联合分布,分析变量间的相关性。

本文以香溪河流域作为研究对象,利用最大熵 Copula 方法进行降雨- 径流水文频率分析计算,为水文分析提供科学依据。

## 1 流域概况

香溪河流域位于湖北省西北部(经纬度范围为  $110^{\circ}25' - 111^{\circ}06' E$  至  $31^{\circ}04' - 31^{\circ}34' N$ ),是三峡水库的主要支流,流域面积约为  $3\ 200\ km^2$ ,海拔约  $1\ 200 \sim 2\ 000\ m$ (见图 1)。香溪河干流长度为  $94\ km$ ,河口距三峡大坝  $34.5\ km$ ,源头分为东河(发源于神农架林区骡马店)和西河(发源于神农架林区的红河)<sup>[9]</sup>。东西两条河流至响淮相汇为香溪河,由北向南纵贯兴山县全境,最终在秭归县香溪镇注入长江。由于受到北部亚热带季风性湿润气候的影响,香溪河流域季节特点表现为:春季冷暖多变;夏季雨量集中,且时常发生暴雨和伏旱;秋季多阴雨;冬季多雨雪、早霜<sup>[10]</sup>。由于地形复杂、地势高差大,香溪河流域为典型的立体水文气象结构,年平均气温为  $15.6\ ^{\circ}C$ 。低山河谷区夏季较长且炎热,极端最高气温达  $43.1\ ^{\circ}C$ ,冬季则较短且温暖;高山地区夏季雨量充沛,冬季则较长且寒冷,极端最低气温达  $-9.3\ ^{\circ}C$ 。香溪河流域年平均降水量为  $900 \sim 1\ 200\ mm$ ,降水量充沛,但年际和年内分配不均匀,随季节变化较大,5月-9月为汛期,降水量约占全年的  $68\%$  左右<sup>[11]</sup>,一般以7月份为降雨高峰,而1月份降水量最少。香溪河流域

多年平均流量  $62.5\ m^3/s$ ,最大流量和最小流量分别为  $2\ 700\ m^3/s$  和  $8.9\ m^3/s$ ,年均径流深  $723.3\ mm$ ,多年平均输沙量约为  $41.3\ 万\ t$ <sup>[12]</sup>。

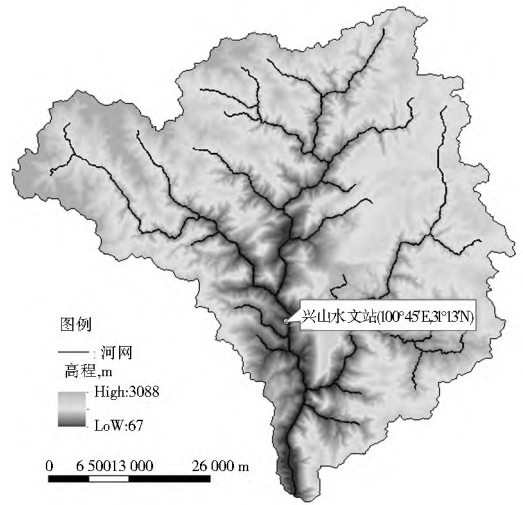


图 1 香溪河流域

Fig. 1 The watershed of Xiangxi

为了分析香溪河流域降雨- 径流之间的关系,本文选取 1991 年- 2008 年香溪河流域的月降雨量和月径流量作为样本数据,见图 2。香溪河流域的降雨量数据由兴山县气象站提供,包含昭君、张官店、郑家坪和水月寺 4 个主要气象站的降雨量信息,月降雨量的变化范围为  $0 \sim 347.32\ mm$ ,其中 1996 年 12 月份降雨量最低,1998 年 8 月份降雨量最高;香溪河流域的径流量数据由兴山水文站提供,月径流量的变化范围为  $7.26 \sim 174.00\ m^3/s$ ,其中 2000 年 4 月份径流量最低,1998 年 8 月份径流量最高。

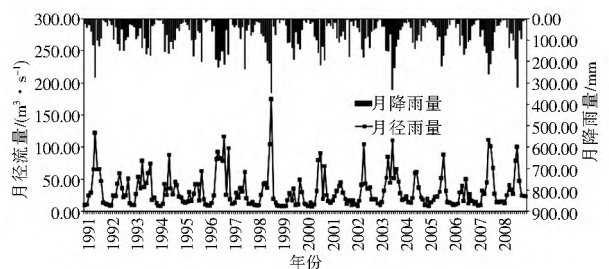


图 2 香溪河流域月降雨量和月径流量观测值

Fig. 2 The observed values of monthly rainfall and runoff in Xiangxi watershed

## 2 研究方法

### 2.1 最大熵 Copula 方法

Copula 函数又称为连接函数,是把多个变量各自的边缘分布连接在一起,生成联合分布的函数<sup>[13]</sup>。利用 Copula 函数进行变量相关性分析时,不必要要求变量具有相同的边缘分布,任意形式的边缘分布均可以利用 Copula 函数生成联合分布,而且

不会出现信息失真<sup>[14,15]</sup>。

然而利用 Copula 函数生成多变量联合分布时,如何确定变量的边缘分布是关键问题。以前的方法大多对边缘分布的线型进行假设,然而所假设的线型并不一定能够很好的拟合变量的分布,体现其统计特征。最大熵(ME)方法是通过选取熵值最大作为条件获得变量的概率分布<sup>[16,17]</sup>。ME 方法选取熵值最大意味着因数据不足而作的假设最少,因此所得到的概率分布偏差最小。另外,ME 方法以给定信息的均值、方差、偏度和峰度为约束,所生成的概率分布能够体现变量的统计特征<sup>[18]</sup>。因此,将 ME 方法与 Copula 函数相结合构建最大熵 Copula (MEC) 方法,能够生成多变量的联合分布,体现变量间的相关性,而且在生成边缘分布的过程中无需对线型进行假设,生成的边缘分布能够很好的体现变量的统计特征。

Copula 函数包含很多分布族,其中,Archimedean Copula 函数被广泛地应用于水文频率分析中,其构造模型和计算过程简单方便、包含多种不同特征的 Copula 函数,且不用受到水文变量间相关性为正或为负的限制<sup>[19]</sup>。给定两个随机变量  $X$  和  $Y$ ,则二维 Archimedean Copula 函数的定义如下:

$$C(u_1, u_2) = \Phi^{-1}[\Phi(u_1), \Phi(u_2)] \quad 0 < u_1, u_2 < 1 \quad (1)$$

式中:  $\Phi(u)$  为 Archimedean Copula 函数的生成元,其逆函数为  $\Phi^{-1}(u)$ ;  $u_1 = F_X(x)$  和  $u_2 = F_Y(y)$  分别为变量  $X$  和  $Y$  的累积分布函数,即边缘分布。本文采用 Archimedean Copula 函数中几个典型的单变量 Copula 函数,包括 Gumbel-Hougaard Copula 函数、Clayton Copula 函数和 Frank Copula 函数,如下所示:

$$C_{\theta}^{GH}(u_1, u_2) = \exp\{-[-(\log u_1)^{\theta} + (-\log u_2)^{\theta}]^{1/\theta}\}, \theta \geq 1 \quad (2)$$

$$C_{\theta}^{CT}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 < \theta < \infty \quad (3)$$

$$C_{\theta}^{FK}(u_1, u_2) = \frac{1}{\theta} \log \left[ 1 + \frac{(e^{\theta u_1} - 1)(e^{\theta u_2} - 1)}{e^{\theta} - 1} \right], -\infty < \theta < \infty \quad (4)$$

式中:  $C_{\theta}^{GH}(u_1, u_2)$ ,  $C_{\theta}^{CT}(u_1, u_2)$  和  $C_{\theta}^{FK}(u_1, u_2)$  分别为 Gumbel-Hougaard Copula 函数、Clayton Copula 函数和 Frank Copula 函数;  $\theta$ ,  $\theta'$  和  $\theta\hat{e}$  为对应参数。为了确定 Copula 函数中的边缘分布,利用 ME 方法选取随机变量的信息熵最大。随机变量  $X$  的信息熵  $H(x)$  的定义如下<sup>[18]</sup>:

$$H(x) = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (5)$$

式中:  $H(x)$  为随机变量  $X$  的熵函数;  $f(x)$  为  $x$  的概

率密度函数(PDF);  $x$  为  $X$  的值,其下界和上界分别为  $a$  和  $b$ 。本文将随机变量的均值、方差、偏度和峰度可作为推断其概率分布的约束<sup>[18]</sup>,可表示为

$$C_0 = \int_a^b f(x) dx = 1 \quad (6)$$

$$C_i = \int_a^b h_i(x) f(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

式中:  $x$  为随机变量的观测值。然后利用拉格朗日乘法求得  $H(x)$  的最大值,令  $\lambda$  为拉格朗日乘子,得到相应的随机变量  $X$  的概率密度函数  $f(x)$ 。

$$f(x) = \exp \left[ - \ln \left[ \int_a^b \exp \left( - \sum_{i=1}^m \lambda h_i(x) \right) dx \right] - \sum_{i=1}^m \lambda h_i(x) \right] \quad (8)$$

通过式(8)确定随机变量的累积分布函数(CDF),即边缘分布,然后选取最适合的 Copula 函数生成随机变量的联合分布,对随机变量间的相关性进行分析。MEC 方法的优势在于,它不但能够生成多变量的联合分布,而且无需线型假设即可生成边缘分布。

## 2.2 相关性度量

本文利用 MEC 方法构建随机变量的联合分布,同时结合相关性度量指标,使随机变量间的相关性分析更加有效和准确。文中将 Spearman 秩相关系数、Kendall 秩相关系数和尾部相关系数作为随机变量间相关性的度量指标。设  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  为取自总体  $(X, Y)$  的样本,  $F(x)$  和  $G(x)$  分别为随机变量  $X$  和  $Y$  的边缘分布,则有:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i - Q_i)^2 \quad (9)$$

$$\tau = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{C_n^2} \quad (10)$$

$$\lambda^b = \lim P[Y < G^{-1}(u) | X < F^{-1}(u)] \quad (11)$$

$$\lambda^p = \lim P[Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)] \quad (12)$$

式(9)中:  $\rho$  为 Spearman 秩相关系数;  $R_i$  和  $Q_i$  分别表示  $X_i$  在  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  中的秩和  $Y_i$  在  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  中的秩。式(10)中:  $\tau$  为 Kendall 秩相关系数;  $c$  和  $d$  分别表示和谐和不和谐的观测对数(若  $(X_i - X_j)(X_i - Y_j) > 0$ , 称  $(X_i, Y_i)$  和  $(X_j, Y_j)$  是和谐的,反之则称两者为不和谐)。

式(11)中:  $\lambda^b$  为下尾相关系数,表示当一个随机变量取值较小时,它对另一个随机变量的取值是否有影响。式(12)中:  $\lambda^p$  为上尾相关性,表示当一个随机变量取值较大时,它对另一个随机变量的取值是否有影响。

本文运用 Spearman 秩相关系数  $\rho$ 、Kendall 秩相关系数  $\tau$  和尾部相关系数  $\lambda$  作为随机变量间的相关性度量指标,计算结果与 MEC 方法生成的联合分

布相结合,探究随机变量间的相关性。

### 2.3 拟合优度检验

本文利用均方根误差 (RMSE) 和 K-S 检验对所生成的边缘分布进行拟合优度检验,利用 Rosenblatt 变换、AIC 准则和 RMSE 对所生成的联合分布进行拟合优度检验。令  $x_k^{est}$  为估计值,  $x_k^{obs}$  为观测值,  $N$  为样本容量,  $n'$  为参数个数,则 RMSE 和 AIC 准则的表达式分别为

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_k^{est} - x_k^{obs})^2}{N}} \quad (13)$$

$$AIC = N \log \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^{est} - x_k^{obs})^2 \right] + 2(n') \quad (14)$$

给定一组升序排列的样本数据  $x(\cdot)$ , 其样本长度为  $n$ ,  $F^*(x)$  为假定分布,  $F_n(x)$  为经验分布, 则 K-S 检验的统计量可以表示为<sup>[20]</sup>

$$T = \sup_x |F^*(x) - F_n(x)| \quad (15)$$

利用 RMSE 和 K-S 检验可对随机变量的边缘分布进行拟合优度检验, 所得到的结果可以判断 MEC 方法生成的边缘分布是否有效。Rosenblatt 变换的经验分布和对应的 Cram r von Mises 统计量分别表示为<sup>[6]</sup>

$$D_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(E_i \leq u), u \in [0, 1] \quad (16)$$

$$S_n^{(B)} = n \int_0^1 \{D_n(u) - C_{\perp}(u)\}^2 du$$

$$\frac{n}{3^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1 - E_{i1}^2)(1 - E_{i2}^2) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - E_{i1} \vee E_{j1})(1 - E_{i2} \vee E_{j2}) \quad (17)$$

式中:  $E_i$  为 Copula 函数的观测值;  $u$  为边缘分布向量;  $n$  为样本容量;  $\vee$  表示取最大值。利用 Rosenblatt 变换、AIC 准则和 RMSE 进行联合分布的拟合优度检验, 结果可以判断 MEC 生成的联合分布能否很好的体现变量间的相关性, 其中 AIC 准则和 RMSE 值最小为 Copula 函数选取的重要判据。

### 3 结果分析

分别利用 Spearman 秩相关系数(式(9))和 Kendall 秩相关系数(式(10))进行香溪河流域降雨量和径流量相依性的度量, 结果为  $\rho_s = 0.732$  和  $\tau = 0.539$ , 表明降雨量和径流量间存在较强的相关性。并将 MEC 方法应用于香溪河流域的降雨-径流相关性分析中, 首先利用 ME 方法生成降雨量和径流量的边缘分布, 分析香溪河流域的降雨量和径流量的特征变化, 然后选取恰当的 Copula 函数生成降雨量和径流量的联合分布, 结合相关性系数, 进一步分

析香溪河流域降雨-径流的相关性。

图 3 为运用 MEC 方法生成的降雨量和径流量的概率分布。其中, 图 3(a) 和图 3(c) 的纵坐标分别为降雨量和径流量的概率密度函数值, 图 3(b) 和图 3(d) 的纵坐标分别为降雨量和径流量的累积分布函数值。由图可知, 生成的概率分布能够捕捉样本经验分布的形状和趋势。为了进一步检验所生成的概率分布能否有效体现香溪河流域的降雨量和径流量的数据特征, 利用 RMSE 和 K-S 检验进行拟合优度检验。对于降雨量分布, K-S 检验的统计量  $T$  为 0.092, 对应的  $P$  值为 0.395(大于 0.05), RMSE 值为 5.243, 即生成的分布函数能够近似模拟香溪河流域的降雨量观测值。对于径流量分布, K-S 检验的统计量  $T$  为 0.096, 对应的  $P$  值为 0.368(大于 0.05), RMSE 值为 2.796, 即生成的分布函数能够近似模拟香溪河流域的径流量观测值。因此, 利用 MEC 方法生成的降雨量和径流量的边缘分布是有效的, 能够准确体现香溪河流域降雨量和径流量观测值的统计特征。

得到降雨量和径流量的边缘分布之后, 需要选取恰当的 Copula 函数生成两者的联合分布。为了确定拟合较优的 Copula 函数, 利用 Rosenblatt 变换、AIC 准则和 RMSE 值对所采用 Archimedean Copula 函数包括 Gumbel Hougard Copula 函数、Clayton Copula 函数和 Frank Copula 函数进行检验, 结果见表 1。对于三种 Copula 函数, Rosenblatt 变换中 Cram r von Mises 统计量对应的  $P$  值均大于 0.05, Gumbel Hougard Copula 函数对应的 RMSE 值和 AIC 值最小, 分别为 0.017 和  $-1.750e+03$ , 因此 Gumbel Hougard Copula 函数拟合降雨量和径流量的联合分布效果较好。

表 1 Copula 函数拟合优度检验  
Tab. 1 The goodness of fit test for Copula

Archimedean Copula 函数	RMSE	AIC	Cram r von Mises 统计量	
			$S_n^{(B)}$	$P$ 值
Gumbel Hougard	0.017	-1.750e+03	183.750	0.342
Clayton	0.026	-1.577e+03	179.519	0.122
Frank	0.069	-1.151e+03	178.459	0.527

通过 Gumbel Hougard Copula 函数得到降雨量和径流量的联合概率分布, 绘制相应的联合概率分布图, 结果见图 4, 其中  $c(u, v)$  表示联合概率密度函数,  $C(u, v)$  表示联合概率分布函数。由图 4 可知, 香溪河流域降雨量和径流量间存在上尾相关性。通过式(12)计算得到降雨量和径流量的上尾相关系数  $\lambda^u$  为 0.624, 更进一步确认了两者间的上尾相关

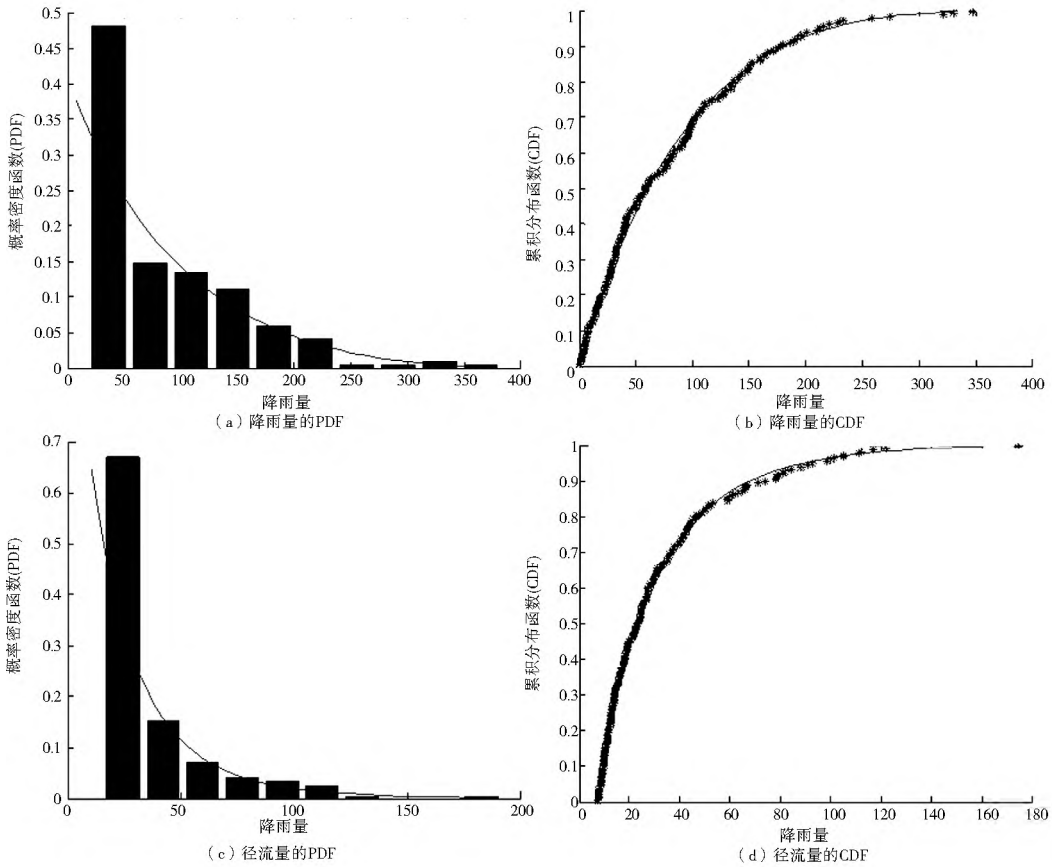


图 3 降雨量和径流量的概率分布

Fig. 3 The probability distribution of rainfall and runoff

要密切观测径流量值,做好防洪排涝的部署工作,同时,决策者可以对水资源的分配量进行预估,对水资源系统规划具有积极的意义。

#### 4 结论

(1) MEC 方法能够较好拟合香溪河流域降雨量和径流量的观测值。根据 RMSE 值和 K-S 检验,利用 MEC 方法生成的边缘分布是有效的,能够捕捉香溪河流域降雨量和径流量经验分布的形状和趋势,体现其统计特征。MEC 方法为单变量水文频率分析提供了可行方案,且无需对分布的线型进行假设,减少了主观因素对结果的影响。

(2) MEC 方法能够有效捕捉降雨量和径流量间的相依结构,生成两变量联合分布。根据 Rosenblatt 变换、AIC 准则和 RMSE 值, Gumbel Hougaard Copula 函数对香溪河流域降雨量和径流量的联合分布的拟合效果较好。

(3) 香溪河流域降雨量和径流量间存在上尾相关性。上尾相关系数为 0.624,表明了降雨量和径流量在极大值情况下的相关性,对香溪河流域极端水文事件的预防和水资源系统规划有着重要的作用。

香溪河流域降雨量年际和年内分配不均,给流域的水资源利用和保护带来了许多不确定性,导致

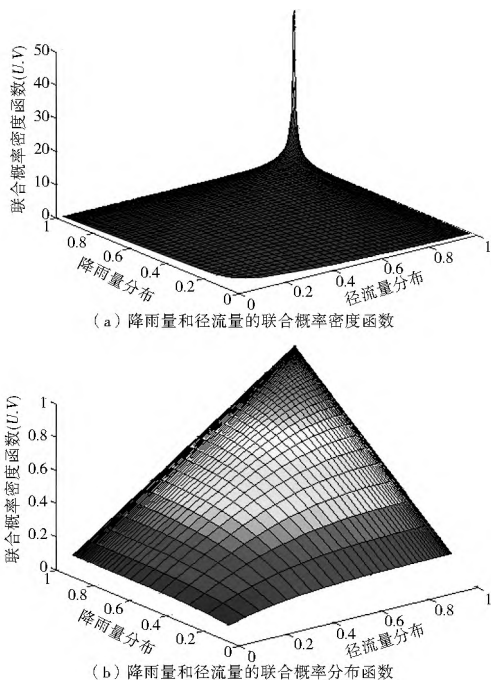


图 4 降雨量和径流量的联合分布

Fig. 4 The joint distribution of rainfall and runoff

性。上尾相关性表明了降雨量和径流量在极大值情况下的相关性,对香溪河流域极端水文事件(洪水)的预防和水资源系统规划有着重要的作用。根据降雨量与径流量间的上尾相关性,当某一个月降雨量极大时,径流量出现极大值的可能性较大,决策者需

径流量具有明显的年际变化及季节特征。利用 MEC 方法得到降雨量和径流量的联合分布,可以根据降雨量的实际情况及对未来降雨量的预测,对径流量进行较好的预估和判断,为流域水资源合理开发利用提供参考依据,为决策者做好防洪排涝工作、减少极端水文事件的损失提供决策支持。同时,MEC 方法能够反映变量间非正态、非对称分布的尾部信息,对香溪河流域的综合治理和工程规划设计具有重要的意义。

参考文献(References):

[1] 郭生练, 闫宝伟, 肖义, 等. Copula 函数在多变量水文频率分析计算中的应用及研究进展[J]. 水文, 2008, 28(3): 1-7. (GUO Sheng lian, YAN Bao wei, XIAO Yi, et al. Multivariate hydrological analysis and estimation[J]. Journal of China Hydrology, 2008, 28(3): 1-7. (in Chinese))

[2] Shin M J, Guillaume J H A, Croke B F W, et al. A review of foundational methods for checking the structural identifiability of models: Results for rainfall runoff[J]. Journal of Hydrology, 2015, 520: 1-16.

[3] 王元超, 王旭, 雷晓辉, 等. 丹江口水库入库径流特征及其演变规律[J]. 南水北调与水利科技, 2015, 13(1): 15-19. (WANG Yuan chao, WANG Xu, LEI Xiao hui, et al. Inflow runoff in the Danjiangkou Reservoir and its evolution[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2015, 13(1): 15-19. (in Chinese))

[4] Correa F N. Multivariate Partial Duration Series in Flood Risk Analysis[M]. In: Singh V P (Ed.), Hydrologic Frequency Modelling, Reidel, Dordrecht. 1987: 541-554.

[5] 贺娟, 王晓松, 王彩云. 加权马尔科夫链模型在密云水库入库流量中的应用[J]. 南水北调与水利科技, 2015, 13(4): 618-621. (HE Juan, WANG Xiao song, WANG Cai yun. Application of the weighted Markov chain model in the inflow prediction of the Miyun Reservoir[J]. South to North Water Diversion and Water Science & Technology, 2015, 13(4): 618-621. (in Chinese))

[6] Kong X M, Huang G H, Fan Y R, Li Y P. Maximum entropy-Gumbel-Hougaard copula method for simulation of monthly streamflow in Xiangxi River, China[J]. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 2015, 29: 833-846.

[7] 王伟, 钟永华, 雷晓辉, 等. 引汉济渭工程水源地与受水区丰枯遭遇分析[J]. 南水北调与水利科技, 2012, 10(5): 23-26. (WANG Wei, ZHONG Yong hua, LEI Xiao hui, et al. Synchronous asynchronous encounter probability of rich-poor precipitation between water source area and water receiving area of the Hanjiang to Weihe River water transfer project[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2012, 10(5): 23-26. (in Chinese))

[8] 张丽静. 基于 Copula 函数的洪峰流量与降雨量相关性研究-以临沂市许家崖水库为例[J]. 南水北调与水利科技, 2014, 12(6). (ZHANG Li jing. Correlation between reservoir peak flood and rainfall based on Copula function - A case study in the Xujiaya reservoir of Linyi City[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2014, 12(6). (in Chinese))

[9] 韩京成. 不确定性水文模拟与流域管理模型研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2014. (HAN Jing cheng. Research on hydrological simulation and watershed management model under uncertainty[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2014. (in Chinese))

[10] 惠阳, 张晓华, 陈珠金. 香溪河流域资源环境情况及开发策略探讨[J]. 长江流域资源与环境, 2000, 9(1): 27-33. (HUI Yang, ZHANG Xiao hua, CHEN Zhu jin. Present situation and strategy about the natural environment of the Xiangxi river basin[J]. Resources and Environment in the Yangtze Basin, 2000, 9(1): 27-33. (in Chinese))

[11] Hu M, Huang G H, Sun W, et al. Inexact quadratic joint probabilistic programming for water quality management under uncertainty in the Xiangxi River, China[J]. Stochastic Environmental Research & Risk Assessment, 2013, 27(5): 1115-1132.

[12] Liu R, Zhang P, Wang X, et al. Assessment of effects of best management practices on agricultural non-point source pollution in Xiangxi River watershed[J]. Agricultural Water Management, 2013, 117(1): 9-18.

[13] 周念清, 赵露, 沈新平. 基于 Copula 函数的洞庭湖流域水沙丰枯遭遇频率分析[J]. 地理科学, 2014, 34(2): 242-248. (ZHOU Ni an qing, ZHAO Lu, SHEN Xin ping. Copula based probability evaluation of rich-poor runoff and sediment encounter in Dongting Lake Basin[J]. Scientia Geographica Sinica, 2014, 34(2): 242-248. (in Chinese))

[14] 孙鹏, 张强, 陈晓宏. 基于 Copula 函数的潘阳湖流域极值流量遭遇频率及灾害风险[J]. 湖泊科学, 2011, 23(2): 183-190. (SUN Peng, ZHANG Qiang, CHEN Xiao hong. Copula based evaluation of high and low-flows frequency of the Lake Poyang Basin and the risk assessment[J]. Journal of Lake Sciences, 2011, 23(2): 183-190. (in Chinese))

[15] 张冬冬, 鲁帆, 严登华, 等. 基于 Archimedean Copula 函数的洪水多要素联合概率分布研究[J]. 中国农村水利水电, 2015, (1): 68-74. (ZHANG Dong dong, LU Fan, YAN Deng hua, et al. Research on multi-dimensional joint distribution of flood characteristics based on Archimedean Copula[J]. China Rural Water and Hydropower, 2015, (1): 68-74. (in Chinese))

[16] 陈海涛, 黄鑫, 邱林, 等. 基于最大熵原理的区域农业干旱度概率分布模型[J]. 水利学报, 2013, 44(2). (CHEN Hai tao, HUANG Xin, QIU Lin, et al. Probability distribution model of regional agricultural drought degree based on the maximum entropy principle[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2013, 44(2). (in Chinese))

[17] 王新民, 马长明, 刘波波, 等. 信息熵在水文模型信息评价中的应用[J]. 水资源与水工程学报, 2014, (6). (WANG Xin min, MA Chang ming, LIU Bo bo, et al. Application of information entropy in information evaluation of hydrological model[J]. Journal of Water Resources and Water Engineering, 2014, (6). (in Chinese))

[18] Hao Z, Singh V P. Single site monthly streamflow simulation using entropy theory[J]. Water Resources Research, 2011, 47(9): 178-187.

[19] Nelsen R B. An Introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 1999.

[20] Conover W J. Practical Nonparametric Statistics[M]. Third Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc. 1999: 428-433.