DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdqk.2015.05.029

第一类越流补给非稳定流公式的性态分析

方 贝[1], 刘元会[1], 郭建青[2]

(1. 长安大学 理学院, 西安 710064; 2. 长安大学 环境科学与工程学院, 西安 710051)

摘要: 在原始数据具有随机误差的情况下, 利用第一类越流补给含水层条件下的汉土什公式进行正逆问题计算时, 公式本身对误差具有传递作用。采用数学方法推导出了用于描述汉土什公式性态的条件数, 建立了正逆问题计算结果误差与原始数据误差间的近似关系。据此, 得出了计算过程中不同的 u 和 r/B 值对原始数据所具有的随机误差的传递作用, 绘制了相应的描述传递作用强弱的条件数的变化曲线, 从而确定了正逆计算问题属于"病态"时的 u 和 r/B 取值范围。

关键词: 汉土什公式; 正逆问题; 条件数; 公式性态; 误差传递; 近似关系; 变化曲线

中图分类号: P641; TV 211.12 文献标志码: A 文章编号: 1672-1683(2015)05-0959-04

Performance analysis of unsteady flow equation with first kind of leakage recharge

FANG Bei[1], LIU Yuan-hui[1], GUO Jian-qing[2]

(1. *College of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China;*
2. *School of Environmental Science & Engineering, Chang'an University, Xi'an 710051, China)*

Abstract: When the original data has random errors, the Hantush equation for the first kind of leakage aquifer system can transfer the errors when it is used in the calculations of the direct and inverse problems. The conditional numbers to characterize the performance of Hantush equation have been derived, and the approximate relationship between the errors from the calculated results and errors from the original data is determined for the direct and inverse problems. On the basis, the transfer effects of different u and r/B values on the random errors from the original data are obtained, the variation curves of conditional numbers for characterization of the transfer effects are plotted, and the scopes of u and r/B values are determined when the direct and inverse problems have "bad performance".

Key words: Hantush equation; direct and inverse problems; conditional numbers; equation performance; error transfer; approximate relationship; variation curve

在第一类越流系统中, 通常采用汉土什公式分析抽水试验数据, 确定越流含水层的水文地质参数[1], 其形式简单, 故在实际计算中得到了广泛应用。把在抽水过程中, 采用已知含水层水文地质参数计算含水层的水位降深值的问题称为正计算问题; 而采用抽水过程中观测到的水位降深值, 反求含水层水文地质参数的问题称为逆计算问题。在正逆计算问题中总会有不确定因素出现, 导致代入公式的参数存在一定的误差, 从而由汉土什公式计算出的结果也具有不确定性[2]。掌握汉土什公式的性态及公式本身对误差的传递作用[3]对解析解的正逆计算具有重要意义。Jiu 等曾采用灵敏度分析的方法对含水层参数的误差进行了研究[4], McElwee 等曾分析了地下水模型的灵敏性[5-6], 这些分析都采用定量化的方法讨论了计算问题时公式的性态, 但却得出了定性的结论。郭建青等用误差分析的方法讨论了泰斯公式的性态[7-8]及一维河流水质方程解析解的性态[9-10], 把"条件数"作为衡量公式性态的标准, 用以判断公式本身对原始数据的随机误差的敏感程度[11]。这种分析方法的原理简单, 易于理解和计算。本文将利用文献[7]的思路计算汉土什公式的条件数, 并对汉土什公式的性态进行初步分析, 最后达到定量的描述该公式对数据误差的传递作用的目的, 进而依据结论可以尽量避免"病态"条件下的计算, 以免计算结果"失真"。

1 基本原理

1.1 基本公式

函数随机误差的计算[12]可表述如下。

收稿日期: 2014-11-25 修回日期: 2015-08-16 网络出版时间: 2015-09-24
网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/13.1334.TV.20150924.2105.027.html
基金项目: 国家自然科学基金项目(11171043)
作者简介: 方 贝(1991-), 女, 陕西咸阳人, 主要从事水文地质的数学方法研究。E-mail: chdxyfb@163.com
通讯作者: 刘元会(1964-), 男, 陕西咸阳人, 教授, 主要从事水文地质的数学方法研究。E-mail: chdlyh@126.com

设 $f(x)$ 是关于 n 个随机变量 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的函数, 在每个变量 x_i 的均值附近作二阶泰勒展开, 则有

$$f(x)=f(\overline{x})+\sum_i^n \frac{\partial(\overline{x})}{\partial(\overline{x}_i)}(x_i-\overline{x}_i)+\frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i \partial \overline{x}_j}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \tag{1}$$

由于 x_i 是随机变量, 故 $x-x_i$ 也是随机变量[13], 从而 $f(x)$ 是随机函数。对式(1)两端分别取数学期望, 则有:

$$\overline{f(x)}=f(\overline{x})+\frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i \partial \overline{x}_j}\sigma_{x_i x_j} \tag{2}$$

式中: $\sigma_{x_i x_j}$ 为随机变量 x_i 和 x_j 的协方差。如果 x_i 和 x_j 相互独立时, 就有 $\sigma_{x_i x_j}=0$, 从而可得

$$\overline{f(x)}=f(\overline{x}) \tag{3}$$

用式(1)减去式(2)得

$$f(x)-\overline{f(x)}=\sum_i^n \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i}(x_i-\overline{x}_i)+\frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i \partial \overline{x}_j}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)-\frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i \partial \overline{x}_j}\sigma_{x_i x_j} \tag{4}$$

式(4)两端分别自乘并取数学期望后得:

$$\sigma_f^2 \approx \sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i}\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_j}\sigma_{x_i x_j} \tag{5}$$

式(3)和式(5)是以下分析的基础。

1.2 汉土什公式的均值形式

在第一类越流系统中, 通常用于求解水文地质参数的汉土什公式[14]如下:

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W(u,B) \tag{6}$$

其中,

$$W(u,B)=\int_u^\infty \frac{\exp\left(-y-\frac{r^2}{4yB^2}\right)}{y}\mathrm{d}y \tag{7}$$

$$u=\frac{r^2\mu}{4Tt} \tag{8}$$

式中: s 为水位降深值(m); Q 为抽水流量(m^3/d); T 为含水层导水系数(m^2/d); μ 为承压含水层的弹性释水系数, 无量纲; $1/B$ 为含水层的越流补给因子, 无量纲; r 为径向距离(m); t 为时间(d)。

利用汉土什公式进行正逆问题计算时, 代入公式的原始数据总会存在着随机误差。在正计算问题中, 把 T、μ、$1/B$ 看作是随机变量, 则由式(6)计算得到的水位降深值 s 也是随机变量; 在逆计算问题中, 把水位降深 s 的观测值看作是随机变量, 则由式(6)反求出的 T、μ、$1/B$ 也是随机变量。

2 分析与讨论

在式(3)中, 令

$f(x)=f(T,\mu,1/B)$, $x_1=T$, $x_2=\mu$, $x_3=1/B$ 则有

$$\overline{s}=f(\overline{T},\overline{\mu},1/\overline{B}) \tag{9}$$

表明当随机变量 T、μ、$1/B$ 相互独立时, 汉土式公式的均值形式与确定形式是一致的, 则在此不需进行过多的讨论。

在式(5)中, 令

$f(x)=f(T,\mu,1/B)$, $x_1=T$, $x_2=\mu$, $x_3=1/B$

则有

$$\sigma_s^2=\varphi_{\overline{T}}^2\sigma_T^2+\varphi_{\overline{\mu}}^2\sigma_\mu^2+\varphi_{1/\overline{B}}^2\sigma_{1/B}^2 \tag{10}$$

其中,

$$\varphi_{\overline{T}}=\frac{\partial s}{\partial \overline{T}} \tag{11}$$

$$\varphi_{\overline{\mu}}=\frac{\partial s}{\partial \overline{\mu}} \tag{12}$$

$$\varphi_{1/\overline{B}}=\frac{\partial s}{\partial\ 1/\overline{B}} \tag{13}$$

式中: σ_s^2, σ_T^2, σ_μ^2, $\sigma_{1/B}^2$ 分别为 s、T、μ、$1/B$ 的方差。

式(10)反映了随机函数的方差与随机变量方差间的关系。为了分析与讨论方便, 引入如下无量纲变量: $C_s=\frac{\sigma_s}{\overline{s}}$, $C_T=\frac{\sigma_T}{\overline{T}}$, $C_\mu=\frac{\sigma_\mu}{\overline{\mu}}$, $C_{1/B}=\frac{\sigma_{1/B}}{1/\overline{B}}$

则式(10)可以写成如下形式:

$$C_s^2=\phi_{\overline{T}}^2C_T^2+\phi_{\overline{\mu}}^2C_\mu^2+\phi_{1/\overline{B}}^2C_{1/B}^2 \tag{14}$$

再由各式之间的关系可以导出:

$$\phi_{\overline{T}}\frac{\overline{T}}{\overline{s}}\varphi_{\overline{T}}=-\frac{\exp\left(-u-\frac{r^2}{4uB^2}\right)}{W(u,B)}-1 \tag{15}$$

$$\phi_{\overline{\mu}}\frac{\overline{\mu}}{\overline{s}}\varphi_{\overline{\mu}}=-\frac{\exp\left(-u-\frac{r^2}{4uB^2}\right)}{W(u,B)} \tag{16}$$

$$\phi_{1/\overline{B}}\frac{1/\overline{B}}{\overline{s}}\varphi_{1/\overline{B}}=-\frac{r^2}{2B^2}\int_u^\infty \frac{1}{y}\mathrm{d}y \tag{17}$$

2.1 正问题的分析与讨论

式(14)可以理解为汉土什公式正问题计算时, 第一类越流含水层系统中的参数 T、μ、$1/B$ 的相对误差的均方差分别为 C_T、C_μ、$C_{1/B}$, 由公式(6)计算出的水位降深值 s 的相对误差的均方差为 C_s。在数值分析原理[15]中称 $\varphi_{\overline{T}}$、$\varphi_{\overline{\mu}}$、$\varphi_{1/\overline{B}}$ 的绝对值为条件数, 其值大于 1.0 时, 公式本身对代入数据的误差起"放大"作用, 如果条件数很大时, 表明即使代入数据的误差很小, 也会导致计算结果的误差较大甚至"失真", 此时称该计算问题为"病态"问题, 其他情况下都可以看作是"良态"的; 当条件数小于 1.0 时, 公式本身对代入数据的误差起"缩小"作用。

图 1(a)为利用式(15)绘制的相应于不同的 u 和 r/B 值的条件数 $|\phi_{\overline{T}}|$ 变化曲线。可以看出, 当 r/B 一定时, $|\phi_{\overline{T}}|$ 随着 u 值的增大先减小后增大, 当 u 足够小时 $|\phi_{\overline{T}}|$ 趋近于 1.0, 即公式本身对 T 的误差的"放大"作用较弱, 此时的正计算问题可以看作是"良态"的; 当 $u<0.5$ 时, $|\phi_{\overline{T}}|$ 随着 r/B 的减小而减小, 且多小于 1.0, 此时在正计算问题中式(6)对 T 的误差起到"缩小"作用; 当 u 较大时, $|\phi_{\overline{T}}|$ 随 r/B 的减小而增大且多大于 1.0, 此时式(6)本身对 T 所具有的误差起"放大"作用。当 u 很大时得到的条件数 $|\phi_{\overline{T}}|$ 很大, 即当代入式(6)中的 T 具有很小的随机误差时, 也可能导致计算出的 s 具有较大的误差, 即在这种条件下汉土什公式的正计算问题是"病态"问题。

图 1(b)为利用式(16)绘制的相应于不同的 u 和 r/B 值的条件数变 $|\phi_{\overline{\mu}}|$ 化曲线。可以看出, 当 r/B 一定, u 足够小时, $|\phi_{\overline{\mu}}|$ 趋近于 0, 即此时在正计算问题中, 公式(6)本身对 μ 所具有的随机误差几乎没有影响; $|\phi_{\overline{\mu}}|$ 的极小值随着 u 的减小而沿着 r/B 增大的方向移动, 即当 u 值较小且 r/B 值较大时, 公式本身对 μ 所具有的随机误差的影响最小; 随着 u 的增大而增大, 当 $u>1.0$ 时, $|\phi_{\overline{\mu}}|$ 的值多大于 1.0, 在这种情况下, 利用公式(6)计算出的结果具有很大的误差, 此时正计算问题属于"病态"问题。

图 1(c) 为利用式(17) 绘制的相应于不同的 u 和 r/B, 条件数变化 $|\phi_{1/\overline{B}}|$ 曲线。可以看出, 当 r/B 一定时, $|\phi_{1/\overline{B}}|$ 随着 u 的增大而减小; 当 u 一定时, $|\phi_{1/\overline{B}}|$ 随着 r/B 的减小而减小, 即 $|\phi_{1/\overline{B}}|$ 的极小值随着 u 的增大而沿着 r/B 减小的方向移动。当 $r/B< 0.5$ 时, $|\phi_{1/\overline{B}}|$ 的值多小于 1.0, 即此时公式(6) 对 $1/B$ 所具有的误差起到了"缩小"的作用, 即在 r/B 较小时的正计算问题都可以看作是"良态"的, 其他情况下均视为"病态"的。

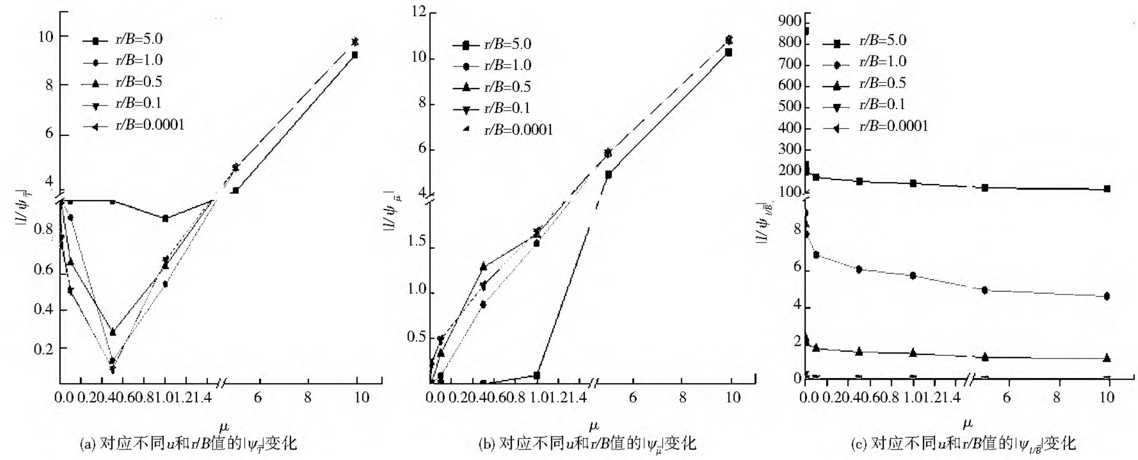


图 1　正问题条件数变化曲线

Fig. 1　Variation curves of conditional numbers of direct problems

2.2　逆问题的分析与讨论

公式(6) 的逆计算问题的条件数, 可以通过对式(14) 作适当的变形得到:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\sigma_{\overline{T}}^2}(\sigma_s^2 - \varphi_{\overline{\mu}}^2\sigma_\mu^2 - \varphi_{1/\overline{B}}^2\sigma_{1/B}^2) \tag{18}$$

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{\sigma_{\overline{\mu}}^2}(\sigma_s^2 - \varphi_{\overline{T}}^2\sigma_T^2 - \varphi_{1/\overline{B}}^2\sigma_{1/B}^2) \tag{19}$$

$$\sigma_{1/B}^2 = \frac{1}{\sigma_{1/\overline{B}}^2}(\sigma_s^2 - \varphi_{\overline{T}}^2\sigma_T^2 - \varphi_{\overline{\mu}}^2\sigma_\mu^2) \tag{20}$$

由上式可知, 在利用汉土什公式确定越流含水层水文地质参数时, 当其中两个参数已知时, 其所具有的误差对水位降深的观测误差起到了消减作用, 故为保守和讨论方便起见, 仅把水位降深的观测误差看作是影响计算结果误差的独立随机变量。以下分别对 $\sigma_\mu=0$, $\sigma_{1/B}=0$; $\sigma_T=0$, $\sigma_{1/B}=0$ 和 $\sigma_T=0$, $\sigma_\mu=0$ 三种情况进行讨论。

(1) $\sigma_\mu=0$, $\sigma_{1/B}=0$ 的情况。

在这种情况下, 式(14)可以写为

$$\sigma_T = \frac{1}{\varphi_{\overline{T}}}\sigma_s \tag{21}$$

其无量纲形式为

$$C_T = \frac{1}{\phi_{\overline{T}}}C_s \tag{22}$$

式(22)可以理解为逆计算问题中, 当水位降深观测值的相对误差的均方差为 C_s 时, 由公式(6) 反求出的含水层参数 T 的相对误差的均方差为 C_T, 则相应的条件数为 $|1/\phi_{\overline{T}}|$。

图 2(a) 为利用式(15) 的倒数形式绘制的相应于不同的 u 和 r/B 的条件数 $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 变化曲线。可以看出, $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 随 u 的减小而趋近于 1.0, 此时公式(6)对原始数据 s 的随机误差的"放大"作用较弱; $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 随 r/B 的增大而减小, 当 r/B 的值较大时, $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 值较小, 此时原始数据 s 的随机误差对计算结果误差的影响最小; 当< 0.5 时, $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 随着 u 的增大而增大, 当 $u>0.5$ 时 $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 随着 u 的增大而减小, 故在 0.5 附近, $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 取得极大值。在 $u=0.5$ 附近 $|1/\phi_{\overline{T}}|$ 的值相当大, 即利用公式(6) 反求 T 时, 即使原始数据 s 具有很小的随机误差, 也会导致计算结果具有很大的误差甚至"失真", 此时的计算问题属于"病态"问题。

(2) $\sigma_T=0$, $\sigma_{1/B}=0$ 的情况。

在这种情况下, 式(14)可以写为

$$\sigma_\mu = \frac{1}{\varphi_{\overline{\mu}}}\sigma_s \tag{23}$$

其无量纲形式为

$$C_\mu = \frac{1}{\phi_{\overline{\mu}}}C_s \tag{24}$$

上式为逆计算问题中, 水位降深观测值的相对误差的均方差 C_s 与利用式(6) 反求出的含水层参数 μ 的相对误差的均方差 C_μ 间的近似关系, 则相应的条件数为 $|1/\phi_{\overline{\mu}}|$

图 2(b) 为利用式(16) 的倒数形式绘制的相应于不同的 u 和 r/B 的条件数 $|1/\phi_{\overline{\mu}}|$ 变化曲线。可以看出, 当 u 值较大时, $|1/\phi_{\overline{\mu}}|$ 值较小且大都小于 1.0, 此时利用式(6) 反求 μ 时, 公式本身对原始数据 s 的误差起到了"缩小"作用; 当 u 值较小或 r/B 较大时, $|1/\phi_{\overline{\mu}}|$ 值多大于 1.0, 即表明在原始数据 s 具有很小的随机误差时, 利用式(6) 反求的结果误差较大甚至"失真", 此时的计算问题属于"病态"问题。

(3) $\sigma_T=0$, $\sigma_\mu=0$ 的情况。

在这种情况下, 式(14)可以写为

$$\sigma_{1/B} = \frac{1}{\varphi_{1/\overline{B}}}\sigma_s \tag{25}$$

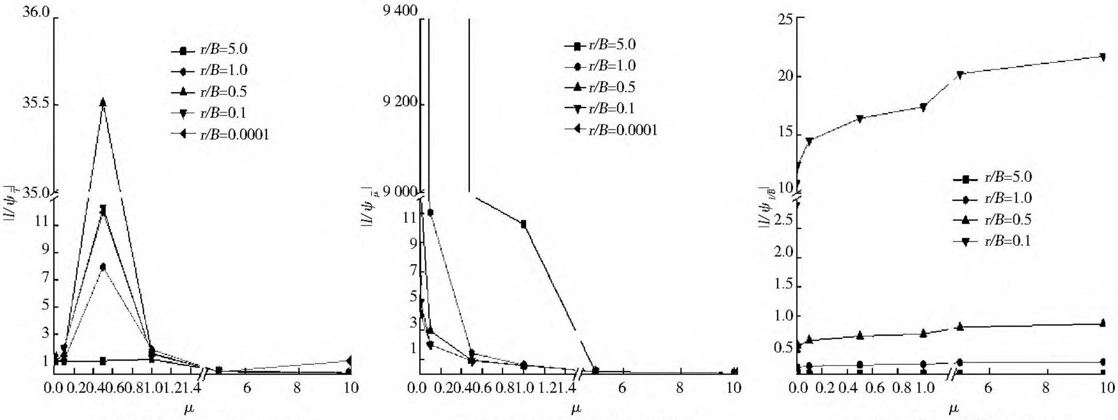
其无量纲形式为

$$C_{1/B} = \frac{1}{\varphi_{1/\overline{B}}}C_s \tag{26}$$

上式表示逆计算问题中, 水位降深观测值的相对误差的均方差 C_s 与利用公式(6)反求出的含水层参数 $1/B$ 的相对误差的均方差 $C_{1/B}$ 间的近似关系, 则其相应的条件数为 $|1/\phi_{1/\overline{B}}|$。

图 2(c) 为利用式(17) 的倒数形式绘制的相应于不同的 u 和 r/B 的条件数 $|1/\phi_{1/\overline{B}}|$ 变化曲线。可以看出, $|1/\phi_{1/\overline{B}}|$ 随

u 的增大而增大，随 r/B 的增大而减小。当 $r/B>0.5$ 时，$|1/\phi_{\sqrt{B}}|$ 值始终小于 1.0，此时式(6)对原始数据 s 的误差起到"缩小"作用；$|1/\phi_{\sqrt{B}}|$ 的极小值随着 r/B 的增大而沿着 u 减小的方向移动，此时公式本身对原始数据 s 的误差传递几乎没有影响；当 r/B 较小时，$|1/\phi_{1/\overline{B}}|$ 值趋近于无穷，此时即使原始数据 s 具有较小的随机误差，利用式(6)反求出的 $1/B$ 的误差也可能较大甚至"失真"，即此时的计算问题属于"病态"问题。



(a) 对应不同u和r/B值的|1/ψT|变化　(b) 对应不同u和r/B值的|1/ψμ|变化　(c) 对应不同u和r/B值的|1/ψ1/B|变化

图 2　逆问题条件数变化曲线

Fig. 2　Variation curves of conditional numbers of inverse problems

3　结论

通过以上分析和讨论，可以得出如下结论：利用汉土什公式计算时，若原始数据具有随机误差，则利用公式(6)计算得到的结果也会具有一定的误差，即汉土什公式对代入数据误差具有传递作用；在正计算问题中，当 u 值较大时，T、μ 的误差对正计算问题的影响是"病态"的，而当 r/B 较大时，$1/B$ 的误差对正计算问题的影响是"病态"的；在逆计算问题中，当 $u=0.5$ 及附近时，计算 μ 和 T 的问题属于"病态"的，而当 r/B 较小时，计算 $1/B$ 的问题属于"病态"的。其它条件下的计算问题均属于"良态"的。在利用汉土什公式进行正逆问题计算时，应尽量避免"病态"问题下的计算，以免计算结果产生较大的误差甚至"失真"，以便保证计算结果的精度。

参考文献(References)：

[1] 朱学愚，钱孝星. 地下水水文学[M]. 北京：中国环境科学出版社，2005. (ZHU Xue-yu, QIAN Xiao-xing. Groundwater hydrology[M]. Beijing: Chinese Environment Science Press, 2005. (in Chinese))

[2] 项彦勇. 地下水力学概论[M]. 北京：科学出版社，2011. (XIANG Yan-yong. Fundamental theory of groundwater mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2011. (in Chinese))

[3] 张诚坚，高健，何南忠. 计算方法[M]. 北京：高等教育出版社，1999. (ZHANG Cheng-jian, GAO Jian, HE Nan-zhong. Computational methods[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese))

[4] Jiao J J. Sensitivity features of aquifer parameters and their implications on parameter estimation[D]. Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Engingineering, Univ. of Birmingham. 1993.

[5] McElwee, C D. and M A Yukler. Sensitivity of groundwater models with respect to variations in transmissivity and storage[D]. Water Resour. 1978, 14 (2): 451-459.

[6] McElwee, C D. Sensitivity of groundwater models[D]. In: Advances in Transport Phenomena in Porous Media. Edby J. Bear and M. Y. Corapcioglu. NATO Adv. Study Inst. Ser. E. v. 1987, 128: 751-817.

[7] 郭建青，李云峰，王洪胜. 泰斯公式性态分析与误差估计方法[J]. 煤田地质与勘探，1999, 27(4): 38-42. (GUO Jian-qing, LI Yun-feng, WANG Hong-sheng. The performance analysis of theis equation and error estimation method[J]. Coal Geology and Exploration, 1999, 27(4): 38-42. (in Chinese))

[8] 郭建青. 泰斯公式对数据误差传递作用的初步分析[J]. 工程勘察，1988(1): 44-48. (GUO Jian-qing. The analysis transfer of the heis equation in datas′error[J]. Engineering Investigation, 1988(1): 44-48. (in Chinese))

[9] 郭建青，李云峰，钱会. 一维河流水质方程解析解性态的初步分析[J]. 水文，1999, 8(6): 30-33. (GUO Jian-qing, LI Yun-feng, QIAN Hui. Analysis on the peerformance of one-dimension stream water quality equation's analytical solution[J]. Hydrology, 1999, 8(6): 30-33. (in Chinese))

[10] Knopman, D S and C I Voss. Behaviour of sensitivities in the one-dimensional advection-dispersion equation: implications for parameter estimation and sampling design[D]. Water Resour. 1973, 23(2).

[11] 薛禹群，谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京：科学出版社，2007. (XUE Yu-qun, XIE Chun-hong. Numerical simulation for groundwater[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))

[12] 沙定国. 误差分析与测量不确定度的评定[M]. 北京：中国计量出版社，2003. (SHA Ding-guo. Evaluation of uncert- ainty in measurement and analysis of error[M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 2003. (in Chinese))

[13] 田铮，秦超英. 随机过程与应用[M]. 北京：科学出版社，2009. (TIAN Zheng, QIN Chao-ying. Stochastic process and application[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))

[14] 郭东屏，宋焱勋，钱会，等. 地下水动力学[M]. 西安：陕西科技大学出版社，1994. (GUO Dong-ping, SONG Yan-xun, QIAN Hui, et al. Groundwater hynamics[M]. Xi'an: Shanxi University of Science and Technology Press, 1994. (in Chinese))

[15] 封建湖，车刚明，聂玉峰. 数值分析原理[M]. 北京：科学出版社，2001. (FENG Jian-hu, CHE Gang-ming, NIE Yu-feng. Princ- iples of numerical analysis[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))