



DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdtqk.2017.01.033

王桂生, 常星, 韩福涛. 基于非饱和土渗流和强度理论的三维边坡稳定分析[J]. 南水北调与水利科技, 2017, 15(1): 199-203. WANG Gui sheng, CHANG Xing, HAN Fu tao. Three dimensional slope stability analysis based on strength theory of unsaturated soil[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2017, 15(1): 199-203. (in Chinese)

基于非饱和土渗流和强度理论的三维边坡稳定分析

王桂生, 常星, 韩福涛

(中水淮河规划设计研究有限公司, 合肥 230061)

摘要: 在边坡稳定分析中, 进行三维稳定分析时通常都是采用饱和土强度理论, 事实上地下水位以上的非饱和区的基质吸力会影响边坡稳定的安全系数, 所以有必要基于非饱和土强度理论进行边坡稳定性分析。因此, 基于非饱和土强度理论, 并结合三维简化 Bishop 法思想推导了三维非饱和边坡稳定安全系数公式来评价边坡稳定性, 并编制了相应的程序。最后, 基于所提方法对喇叭河道岸坡的稳定性进行了评价, 结果表明利用非饱和强度理论的岸坡安全性能比利用饱和强度理论的安全性有所提高, 能更客观地对岸坡稳定进行评价。

关键词: 非饱和土强度理论; 三维简化 Bishop 法; 三维稳定分析

中图分类号: U416 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-1683(2017)01-0199-05

Three dimensional slope stability analysis based on strength theory of unsaturated soil

WANG Gui sheng, CHANG Xing, HAN Fu tao

(China Water Huaihe Planning Design and Research CO., LTD, Hefei 230061, China)

Abstract: In the slope stability analysis, the strength theory of saturated soil was commonly adopted in three dimensional slope stability analysis, but in fact the effect of matric suction in unsaturated zone could not be ignored, so it is necessary to adopt the strength theory of unsaturated soil for slope stability analysis. Therefore, based on the strength theory of unsaturated soil and thought of three dimensional simplified Bishop's method, a new formula of safety factor was deduced to evaluate slope stability and corresponding program was developed. Finally, the slope stability of Sima reach in Yangtze river was analyzed using the proposed method, the results indicated that the safety factor was increased based on strength theory of unsaturated soil compared to strength theory of saturated soil and it was more reasonable to evaluate slope stability by the proposed method.

Key words: strength theory of unsaturated soil; three dimensional simplified Bishop's method; three dimensional slope stability analysis

目前在边坡稳定性分析中, 极限平衡分析的二维条分法因其方法简单且计算精度也符合工程要求, 一直以来被广泛应用。然而, 实际自然界无论挖方还是填方边坡或挖填结合边坡, 均或多或少存在软弱结构面和各向异性, 均质挖方填方土坡也同样因施工工序和土坡上的构筑物影响, 滑坡体往往具有明显的空间三维特性, 再将边坡简化为二维稳定分析就不再适合。因此, 针对边坡的三维特性, 国外

诸多学者较早地提出了不同的基于二维条分法的三维扩展条分法。Hovnad 忽略了条柱间所有作用力提出了三维扩展普通条分法^[1], Chen 和 Chmaeva 假设条柱侧面间作用力平行于滑面提出了三维扩展 Spencer 法^[2], Hunger 忽略了条柱侧面垂向剪切力提出了三维扩展简化 Bishop 法^[3], 并提出了三维简化 Janbu 法^[4]。之后, Zhang^[5] 和 Lam^[6] 分别对三维 Spencer 法进行了改进, Huang^[7] 对三维简化 Bishop

收稿日期: 2016-02-06 修回日期: 2016-08-22 网络出版时间: 2017-01-04

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/13.1334.TV.20170104.1018.023.html>

作者简介: 王桂生(1989), 男, 江苏如东人, 高级工程师, 主要从事水工结构的设计与研究。E-mail: 13655526253@163.com

法进行了改进。相对而言,国内对于三维稳定分析法开展研究较晚,冯树仁^[8],陈祖煜^[9],陈胜宏^[10],张均峰^[11]等分别针对各种三维扩展法进行了改进。

上述方法中常采用饱和土强度理论,从而忽略了非饱和区中由负孔隙水压力提供的部分抗剪强度。然而,边坡中的很大一部分处于非饱和区,所以有必要采用非饱和土强度理论进行分析。目前,应用非饱和土强度理论并结合边坡稳定分析的二维条分法的研究已经较多,但是基于非饱和土强度理论的三维边坡稳定分析并不多见。曹亚星^[12]在用非饱和土强度理论研究三维土坡稳定性时仅考虑了有地下水的工况,并且采用滑面底距地下水位的垂直距离来近似确定孔隙水压力值。然而,在多数情况下,边坡失稳往往跟渗流有着十分密切的关系,因水位升降引起渗流从而导致边坡失稳已经成为一个重要模式。因此,本文基于三维扩展简化 Bishop 法思想,结合非饱和土强度理论,推导出基于非饱和土强度理论的三维边坡稳定公式,充分考虑了非饱和区中由负孔隙水压力提供的部分抗剪强度,更接近边坡失稳真实情况。再结合渗流场分析结果对边坡稳定性进行了评价。在分析中本文应用了渗流分析软件 Seep3D 进行非饱和渗流分析,然后将分析得到的渗流场应用到边坡稳定分析中。

1 非饱和土边坡的三维稳定分析

1.1 非饱和土强度基本理论

在进行边坡稳定分析中,强度参数的确定相当重要。在非饱和土强度理论中,由于非饱和土中存在固、液、气三相,使得其在工程性状与饱和土有极大的差异。由于负孔隙水压力的存在而产生的基质吸力会对土体的抗剪强度产生影响,饱和土强度理论和非饱和土强度理论之间的主要不同就是抗剪强度参数的不同。Fredlund 提出的非饱和土抗剪强度公式应用较广,该抗剪强度公式可以由应力状态变量 $(\sigma - u_a)$ 和 $(u_a - u_w)$ 来表达^[13]:

$$\tau = c' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) \tan \phi \quad (1)$$

式中: c' 为有效黏聚力; σ 为总应力; u_w 为孔隙水压力; u_a 为孔隙气压力; ϕ' 为有效内摩擦角; ϕ 表示抗剪强度随基质吸力而增加的速率。

公式(1)中体现基质吸力对强度影响的参数为 $\tan \phi$, Fredlund 曾建议对于黏土 ϕ 一般比有效内摩擦角小 5° 左右,并给出了其它性质土的 ϕ 的建议参考值^[14]。Gan^[15]指出 $\tan \phi$ 并非常数,而是随着基质吸力的变化而变化。Fredlund^[16]在非饱和土微观分析的基础上,提出了用土水特征曲线来预测

非饱和土抗剪强度的经验分析模型。龚壁卫^[17]提出一种土水特征曲线的简化方法,即将对应于进气值和残余含水率的曲线近似为一条直线,并建议用对数方程来表征土水特征曲线:

$$\theta = a - b \lg(u_a - u_w) \quad (2)$$

式中: a, b 为拟合参数。

根据这种简化的土水特征曲线,可以推得一种简化的拟合公式:

$$\tan \phi = [p - q \lg(u_a - u_w)] \tan \phi \quad (3)$$

其中,参数 p, q 可以根据土水特征曲线进气值与残余含水率对应的区段 $[(u_a - u_w)_s, (u_a - u_w)_r]$ 的数据进行拟合而得:

$$p = \frac{\lg(u_a - u_w)_r}{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)_s}, q = \frac{1}{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)_s} \quad (4)$$

结合 Fredlund 提出的抗剪强度公式可以得到一种简单的公式来确定非饱和土抗剪强度:

$$\tau = c' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) [p - q \lg(u_a - u_w)] \tan \phi \quad (5)$$

本文即采用此强度公式。

1.2 三维非饱和土边坡稳定安全系数公式推导

三维极限平衡分析条柱法是从二维垂直条分法扩展而来的,将二维垂直条分法中的条块进行拓展,使之成为条柱体,按一定的排列规则将滑坡体按条柱体进行离散。Hungar 在文献[3]中给出了基于饱和土强度理论的三维简化 Bishop 法的安全系数计算公式,本文同样按照三维简化 Bishop 法的思想假定在条柱间的全部剪力为零,条柱体无体积变形以及滑裂面为球面,通过绕球心力矩和力平衡建立极限平衡方程。并结合 Fredlund 提出的非饱和土抗剪强度理论,推导出了基于非饱和土强度理论的三维简化 Bishop 法的安全系数计算公式。

图 1 为滑体条柱离散图,滑体为滑裂面与坡面包围部分的土体,本文假设滑体为旋转对称椭球体,旋转轴为 $z-z'$ 轴,中性面为对称面, $x-y$ 平面内滑弧为圆形, $y-z$ 平面内滑弧为椭圆。假设沿 x 轴方向 m 等分,沿 z 轴方向 n 等分,将滑体离散为 m 行、 n 列,共离散出 $m \times n$ 个条柱。取滑体内任一条柱(i 行, j 列)进行受力分析,见图 2,并假定各条柱体在整体滑动中不考虑体积变化,在各条柱的安全系数相同且为整体安全系数,且 $T_{(i,j)}$ 的方向假定为平行于滑动方向即在 xoy 平面内,则可建立竖直向力的平衡方程: $W_{(i,j)} + q_{(i,j)} \cos \alpha_{(i,j)} = N_{(i,j)} \cos \gamma_{(i,j)} + T_{(i,j)} \sin \alpha_{(i,j)}$ (6)

式中: $W_{(i,j)}$ 为条柱重量; $q_{(i,j)}$ 为条柱顶面所受力; $N_{(i,j)}$ 为作用在条柱底面的法向力; $T_{(i,j)}$ 为作用在条柱底面的抗剪力; $\alpha_{(i,j)}$ 为 $q_{(i,j)}$ 与竖直方向夹角;

$\gamma_y(i,j)$ 为条柱底面法向力与竖直方向夹角; $\alpha_x(i,j)$ 为条柱底面在 x 轴向与水平面夹角。

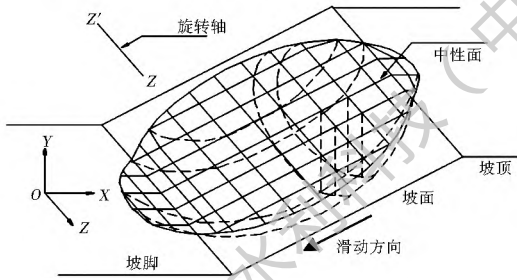


图1 滑体离散示意图

Fig. 1 Schematic diagram of discretion of sliding mass

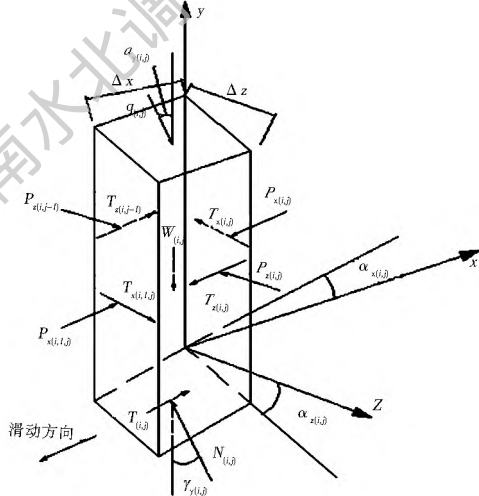


图2 条柱受力示意图

Fig. 2 Schematic diagram of forces subjected on column

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{m a(i,j)} \left[(W(i,j) + q(i,j) \cos \alpha_x(i,j)) \tan \phi_{(i,j)} - u_w(i,j) \cdot \right] R_{(i,j)}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W(i,j) \sin \alpha_x(i,j) R_{(i,j)} + Q} \quad (10)$$

式中: Q 为所有土条柱中 $q(i,j)$ 对滑动力矩的贡献之和; $R_{(i,j)}$ 为过土条柱底部中心点的椭球体截面圆的半径。

若条柱底面位于饱和区内即孔隙水压力 $u_w(i,j)$ 为正时, 取 $\phi_{(i,j)} = \phi_{(i,j)}$, 若位于非饱和区内即孔隙水压力为负时可根据式(4)确定。对于渗流中存在坡外水位的情况, 当条柱顶面位于坡外水位以下时, 顶面受力 $q(i,j)$ 即为顶面所受水压力, 对于条柱顶面位于坡外水位以上的条柱 $q(i,j)$ 取为 0。此时 Q 为坡外水压力对滑体的力矩, 可以等价为坡外水位以下滑体同体积水产生的力矩, 但方向相反。在求滑动力矩和抗滑力矩时土体均取天然容重和饱和容重, 但在滑动力矩中应减去与坡外水位以下滑体同体积水产生的力矩。

2 工程实例

此处采用本文方法对长江下游嘶马河段岸坡进行稳定性分析。另外, 为进行比较, 还分别基于饱和

条柱底面上的抗剪力可表达如下:

$$T_{(i,j)} = \frac{A_{(i,j)}}{F_s} \left[c'_{(i,j)} + (\sigma_{(i,j)} - u_{a(i,j)}) \tan \phi_{(i,j)} + (u_{a(i,j)} - u_{w(i,j)}) \tan \phi_{(i,j)} \right] \quad (7)$$

式中: F_s 为安全系数; $A_{(i,j)}$ 为条柱底面面积; $c'_{(i,j)}$ 为条柱底面有效黏聚力; $\sigma_{(i,j)}$ 为土条底面总应力; $u_{w(i,j)}$ 为作用在条柱底面的孔隙水压力; $u_{a(i,j)}$ 为作用在条柱底面的孔隙气压力; $\phi_{(i,j)}$ 为条柱底面有效内摩擦角; $\phi_{(i,j)}$ 为条柱底面非饱和强度参数。

将式(8)代入式(7), 并考虑到 $N_{(i,j)} = \sigma_{(i,j)} \cdot A_{(i,j)}$, 整理后可得条柱底面法向力为

$$N_{(i,j)} = \frac{1}{m a(i,j)} \left[W(i,j) + q(i,j) \cos \alpha_x(i,j) - c'_{(i,j)} A_{(i,j)} \sin \alpha_x(i,j) / F_s + u_{a(i,j)} A_{(i,j)} \tan \phi_{(i,j)} \cdot \sin \alpha_x(i,j) / F_s - (u_{a(i,j)} - u_{w(i,j)}) A_{(i,j)} \tan \phi_{(i,j)} \cdot \sin \alpha_x(i,j) / F_s \right] \quad (8)$$

通常情况下, 孔隙气压力 $u_{a(i,j)}$ 为大气压力, 因此式(8)可简化为

$$N_{(i,j)} = \frac{1}{m a(i,j)} \left(W(i,j) + q(i,j) \cos \alpha_x(i,j) - c'_{(i,j)} A_{(i,j)} \cdot \sin \alpha_x(i,j) / F_s + u_{w(i,j)} A_{(i,j)} \tan \phi_{(i,j)} \sin \alpha_x(i,j) / F_s \right) \quad (9)$$

其中, $m a(i,j) = \cos \gamma_y(i,j) + \frac{\sin \alpha_x(i,j) \tan \phi_{(i,j)}}{F_s}$ 。则根据对旋转轴 $z-z'$ 的力矩平衡可得安全系数公式如下:

强度理论和非饱和强度理论对岸坡进行了二维和三维稳定分析。

嘶马弯道位于长江扬中河段的上游段, 弯道江岸的地面高程一般仅 2.5~3.0 m, 为平坦的长江河漫滩。弯道的大部分河段的地层为 17 世纪以来新的长江冲积层, 在 -50 m 以上具有典型的河流相的二元结构。从 20 世纪 70 年代起, 江都市又在江岸上修建了堤坝。根据江都市地矿局提供的钻孔勘测资料, 并结合附近相关土层的分析资料, 可将土层分为 4 层, 各土层的特性指标见表 1。在进行稳定性分析时, 仅将上面三层土作为研究对象, 并根据资料可以得到简化后的地质模型断面图见图 3。另外, 嘶马河段的汛期在每年的 5 月-10 月, 最高水位出现在 6 月-9 月, 以 7 月份水位最高, 平均水位为 5 m, 1 月为枯水期, 平均水位为 2 m, 年平均水位为 3.5 m。此处, 对三种工况进行稳定性评价: 日潮差情况, 洪水期水位上涨情况, 洪水期水位下降情况。

表 1 各层土特性指标

Tab. 1 Property parameters of soil in each layer

土层	高程范围/m	含水率 w(%)	容重 $\gamma / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	c / kPa	$\phi / (^\circ)$	$\phi_b / (^\circ)$	饱和渗透系数 $k / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
堤身填土	8~3	39.1	20	5	18	16	1.0×10^7
淤泥质粉质黏土层	3~-17	35.4	17.6	15	25	18	1.0×10^6
粉砂层	-17~-50	25.9	18.5	0	30	20	3.0×10^3
含砾细砂层	-50 以下	25.0	19.7	0	32	20	5.78×10^3

全系数的变化极小。分析其原因为,在日潮差周期内尽管江水位在不断变化,但是由于变化周期较短,另外上部土层渗透系数较小,所以坡内流场在短时间内来不及变化,孔隙水压力基本保持不变,故安全系数变化不大。在各种分析方法中,利用三维分析方法得到的安全系数要比用二维分析方法得到的安全系数有较大提高,用非饱和强度理论得到的安全系数比用饱和强度理论得到的安全系数也有一定的提高。

(2) 洪水期水位上涨情况。

此时设坡内地下水位为 2.5 m,江水位经过 10 天以 0.4 m/d 的速度由 2.0 m 上升至 6.0 m,以每天为一步长,可以算出各天的安全系数值,列于表 3 中,各时刻的滑动面为一簇同滑动起点,不同滑动半径的圆弧。由表中可以看到,用三维分析方法和非饱和强度理论得到的安全系数仍然是最高的,另外在水位上涨期间,随着水位的上涨安全系数降低。究其原因是此处水位上涨速度属于缓涨,并未产生较大超孔隙水压力,另外由于水位上涨使得岸坡的抗剪强度降低,从而导致安全系数降低。

表 3 水位上涨期各时刻岸坡安全系数

Tab. 3 Safety factor of slope during rising period of water level

时刻/d	安全系数			
	二维饱和和稳定	二维非饱和和非稳定	三维饱和和稳定	三维非饱和和非稳定
1	1.369	1.405	1.545	1.573
2	1.364	1.399	1.539	1.566
3	1.358	1.392	1.533	1.561
4	1.351	1.385	1.524	1.550
5	1.342	1.375	1.516	1.542
6	1.332	1.364	1.504	1.529
7	1.320	1.352	1.490	1.513
8	1.307	1.338	1.475	1.497
9	1.293	1.322	1.458	1.479
10	1.277	1.304	1.444	1.463

(3) 洪水期水位下降情况。

同工况 2 相反,此时设坡内地下水位为 2.5 m,江水位经过 10 天以 0.4 m/d 的速度由 6.0 m 下降至 2.0 m,仍以每天为一步长,可以算出各天的安全系数值,列于表 4 中,各时刻的滑动面为一簇同滑动起点,不同滑动半径的圆弧。同样可以看出用三维方法和非饱和强度理论得到的安全系数较高,此时的水位降落属于缓降,随着水位的降落,淹没在水下的岸坡减少,使得岸坡抗剪强度增大,安全系数升高。

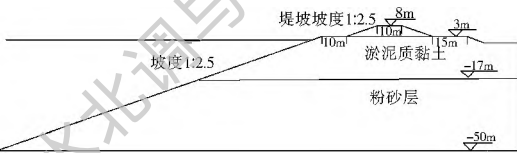


图 3 嘶马岸坡断面结构

Fig. 3 Section of slope in Sima reach

(1) 日潮差情况。

根据嘶马河段的水文资料,嘶马河段一日潮起潮落水位变化极快,平均每 13 h 经历一次,潮差一般在 1.5 m 左右。假设初始时刻江水位为 2.0 m,坡内地下水位为 2.5 m,每日江水位变化见图 4。在这种非稳定渗流情况下每隔 2 h 计算一次岸坡安全系数,结果列于表 2 中,各时刻的滑动面为一簇同滑动起点,不同滑动半径的圆弧。

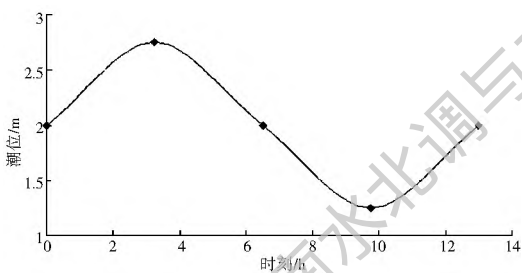


图 4 潮位随时间变化

Fig. 4 Relation diagram between tidal level and time

表 2 日潮差期间各时刻岸坡安全系数

Tab. 2 Safety factor of slope during tide

时刻/h	安全系数			
	二维饱和和稳定	二维非饱和和非稳定	三维饱和和稳定	三维非饱和和非稳定
1	1.370	1.406	1.526	1.555
3	1.368	1.404	1.520	1.543
5	1.369	1.405	1.527	1.546
7	1.373	1.409	1.536	1.559
9	1.376	1.412	1.542	1.568
11	1.376	1.412	1.540	1.565
13	1.372	1.408	1.530	1.557

表中结果表明,在日潮差的影响下,边坡稳定安

表4 水位下降期各时刻岸坡安全系数

Tab.4 Safety factor of slope during dropping period of water level

时刻 /d	安全系数			
	二维饱和和稳定	二维非饱和和非稳定	三维饱和和稳定	三维非饱和和非稳定
1	0.988	1.007	1.155	1.180
2	1.005	1.023	1.164	1.189
3	1.026	1.043	1.181	1.202
4	1.049	1.066	1.205	1.222
5	1.074	1.091	1.232	1.248
6	1.102	1.115	1.258	1.274
7	1.127	1.141	1.281	1.296
8	1.155	1.169	1.308	1.322
9	1.183	1.196	1.338	1.352
10	1.212	1.224	1.385	1.394

3 结语

本文基于边坡稳定的三维简化 Bishop 法思想,结合非饱和土强度理论推导出了基于非饱和土强度理论的边坡稳定三维分析的安全系数公式。并对嘶马河道工程进行了稳定性分析。在分析中分别对日潮差工况、洪水期水位上涨工况和洪水期水位下降工况等三种工况进行了研究。结果表明,采用三维分析理论得到的边坡稳定安全系数要比用二维分析方法得到的安全系数有较大提高,从表 2、表 3、表 4 可见三维饱和分析安全系数比二维饱和安全系数分别提高 11.3% ~ 12.1%、12.7% ~ 13.1%、13.1% ~ 16.9%。另外采用非饱和土和强度理论得到的安全系数比饱和土强度理论得到的安全系数也有一定的提高,从表 2、表 3、表 4 可见三维非饱和分析安全系数比三维饱和安全系数分别提高 1.1% ~ 1.9%、1.3% ~ 1.8%、0.7% ~ 2.2%。因此,本文结合边坡稳定的三维分析法和非饱和土强度理论能更客观更有效地对边坡进行稳定性评价。当然实际工程中大部分稳定问题可以简化为三维问题来分析,但是对于大范围的堤防整体滑动采用三维、二维稳定分析还需更进一步根据实际情况选择分析方法。

参考文献(References):

[1] Hovland H J. Three dimensional method of slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1977, 103: 971-986.

[2] Chen R H, Chameau J L. Three dimensional limit equilibrium analysis of slopes[J]. Geotechnique, 1982, 33: 31-40.

[3] Hunger O. An extension of Bishop's simplified method of slope stability analysis to three dimension[J]. Geotechnique, 1987, 37: 113-117.

[4] Hunger O, Salgado F M, Byme P M. Evaluation of a three dimensional method of slope stability analysis[J]. Canadian

Geotechnical Journal, 1989, 26: 679-686.

[5] Zhang X. Three dimensional stability analysis of concave slopes in plane view[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 114(6): 658-671.

[6] Lam L, Fredlund D G. A general limit equilibrium model for three dimension slope analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(6): 905-919.

[7] Huang C C, Tsai C C. New method for 3D and asymmetrical slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(10): 917-927.

[8] 冯树仁, 丰定详, 葛修润, 等. 边坡稳定性的三维极限平衡分析方法及应用[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(6): 657-661. (FENG Shuren, FENG Dingxiang, GE Xiurun, et al. Three dimensional limit equilibrium of slope stability analysis methods and application[J]. Chinese Journal of geotechnical engineering, 1999, 21(6): 657-661. (in Chinese))

[9] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡法[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 525-529. (CHEN Zuruyu, MI Hongliang, WANG Xiaogang. Limit equilibrium method for slope stability analysis of the three dimensional[J]. Chinese Journal of geotechnical engineering, 2001, 23(5): 525-529. (in Chinese))

[10] 陈胜宏, 万娜. 边坡稳定分析的三维剩余推理法[J]. 武汉大学学报:工学版, 2005, 38(3): 69-73. (CHEN Shenghong, WAN Na. Three dimensional residual reasoning method for slope stability analysis[J]. Journal of Wuhan University: Engineering and Technology Edition, 2005, 38(3): 69-73. (in Chinese))

[11] 张均峰, 王思莹, 祁涛. 边坡稳定分析的三维 Spencer 法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(19): 3434-3439. (ZHANG Junfeng, WANG Siying, QI Tao. Three dimensional Spencer method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of rock mechanics and Engineering, 2005, 24(19): 3434-3439. (in Chinese))

[12] 曹亚星. 饱和非饱和土坡稳定性的三维极限平衡分析[D]. 天津: 天津大学, 2006. (CAO Yaxing. Saturated unsaturated three dimensional limit equilibrium analysis of slope stability [D]. Tianjin University, 2006. (in Chinese))

[13] Fredlund D G, Morgenstem N R, Widger R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, 15(3): 313-321.

[14] Fredlund D G, Rahardjo H. 陈仲颐等译. 非饱和土土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997. Fredlund D G, Rahardjo H. CHEN Zongyi, et al. Joint translation, Soil mechanics for unsaturated soils[M]. Beijing: China Building Industry Press, 1997. (in Chinese))

[15] Gan J K M, Fredlund D G, Rahardjo H. Determination of the shear strength parameters of an unsaturated soil using the direct shear test[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1988, 25(3): 500-510.

[16] Fredlund D G, Vanapalli S K, Xing A, et al. Predicting the shear strength function for unsaturated soils using the soil water characteristic curve[C]. 1st International Conference on Unsaturated Soils, Paris, 1995.

[17] 龚壁卫, 詹良通, 刘艳华, 等. 非饱和膨胀土的抗剪强度特性研究[J]. 长江科学院院报, 2000(8): 19-22. (GONG Biwei, ZHAN Liangtong, LIU Yanhua, et al. Unsaturated expansive of soil shear strength properties[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2000(8): 19-22. (in Chinese))