

DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdtk.2018.0087

黄一昕, 梁忠民, 胡义明, 等. 关于水文同频率地区组成法中相应洪量频率的探讨[J]. 南水北调与水利科技, 2018, 16(3): 189-193. HUANG Y X, LIANG Z G, HU Y M, et al. Discussion on the corresponding flood frequency in the Hydrological Equivalent Frequency Regional Composition method[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2018, 16(3): 189-193. (in Chinese)

# 关于水文同频率地区组成法中相应洪量频率的探讨

黄一昕, 梁忠民, 胡义明, 李彬权, 王 军

(河海大学 水文水资源学院, 南京 210098)

**摘要:** 水文中往往需要研究水文变量在空间上的分配规律, 同频率地区组成法是目前解决该问题的一个重要方法, 但其中仍有一些理论问题悬而未解。以“上下同频、区间相应”的组成方案为例, 区间相应量的频率  $C$  与“同频”中设计频率  $P$  之间的大小关系, 无法判断, 目前尚无理论证明。因此, 对正态分布和  $P$ - $\theta$  分布, 分别通过理论推导和统计试验途径, 明确了  $C$  与  $P$  之间关系。对设计洪水问题, 根据“上下同频、区间相应”求得的区间相应洪量, 其频率  $C$  将大于设计频率  $P$ ; 对径流或枯水设计问题而言, 区间径流量的频率  $C$  将小于设计保证率  $P$ 。研究结果从理论上进一步明晰了同频率地区组成法中相应量的频率问题。

**关键词:** 同频率地区组成法; 正态分布;  $P$ - $\theta$  型分布; 设计频率; 设计保证率

中图分类号: P333.6 文献标志码: A 文章编号: 1672-1683(2018)03-0189-05

## Discussion on the corresponding flood frequency in the Hydrological Equivalent Frequency Regional Composition method

HUANG Yixin, LIANG Zhongmin, HU Yiming, LI Binqun, WANG Jun

(College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** The spatial distribution rules of hydrological variables are often studied in hydrology. The Equivalent Frequency Regional Composition (EFRC) method is an important approach to solving this problem at present. However, there are still some theoretical issues that remain unsolved. Take as an example the composition scheme of "same design frequencies at upstream and downstream, with corresponding value at the interval", we cannot determine which is larger between the frequency of the interval area ( $C$ ) and the design flood frequency ( $P$ ) at both upstream and downstream due to a lack of theoretical proof. In this study, we investigated the relationships between  $C$  and  $P$  for the normal and Pearson type III (PE3) distributions by means of theoretical derivation and Monte Carlo (MC) experiment. Results showed that  $C$  is larger than  $P$  for the design flood problem, while for the design problem of runoff or low flow,  $P$  is larger than  $C$ . Therefore, this study has clarified in theory the design frequency of corresponding value at the interval for the EFRC method.

**Key words:** equivalent frequency regional composition method; normal distribution; Pearson type III distribution; design frequency; design guarantee rate

设计洪水分析计算是为水利及涉水工程提供合理的水文设计值<sup>[1-4]</sup>, 当涉及到多个站点(断面)的分

收稿日期: 2018-01-05 修回日期: 2018-04-02 网络出版时间: 2018-04-23

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/13.1334.TV.20180420.1639.002.html>

基金项目: 国家重点研发计划重点专项(2016YFC0402709); 国家自然科学基金(51709073)

Funds: Key Project of National Key Research and Development Program of China (2016YFC0402709); National Natural Science Foundation of China (51709073)

作者简介: 黄一昕(1996-), 女, 江西黎川人, 主要从事水文学及水资源方面研究。E-mail: hyxhhu@163.com

通讯作者: 梁忠民(1962-), 男, 辽宁凤城人, 教授, 博士生导师, 主要从事水文水资源方面研究。E-mail: zmliang@hhu.edu.cn

析计算时,需要处理设计断面以上各部分设计洪水地区组成的问题。传统的设计洪水地区组成方法主要包括地区组合法、频率组合法和随机模拟法<sup>[1]</sup>,其中,地区组合法是现行设计洪水地区组成计算中最为常用的方法。地区组合法研究的是当设计断面发生设计标准洪水时,上游及其区间洪水的地区组成情况。为了在各种可能出现的洪水地区组成中,选择一种特定的组成作为设计地区组成,使计算成果规范化且偏于安全,目前常采用同频率地区组合法,即“上下同频、区间相应”,或者“区间下游同频、上游相应”<sup>[5-8]</sup>。另外,近年来兴起的 Copula 函数多维联合分布理论,也可用来分析计算洪水地区组成或峰量组合的问题<sup>[9-13]</sup>。但是,无论采用哪一种洪水地区组合法,对相应洪量的频率大小一般认为是不确定的,例如,对同频率地区组合法中“上下同频、区间相应”的组成情况,可以根据水量平衡原理得到区间相应洪量,但区间相应洪量的频率是多少?目前文献中一般都笼统地概括为“其频率可能等于 $P$ ,也可能大于或小于 $P$ ”,尚未见到相应的理论证明,给实际应用带来一定困惑。

因此,本文通过理论推导和统计试验,对同频率地区组合法中“相应”洪量频率大小的问题进行研究,为实际工程水文设计提供理论依据。

## 1 同频率地区组合法简介

以图1所示的流域上游、区间及下游洪水组成为例,设 $X$ 、 $Y$ 和 $Z$ 分别为其洪量的随机变量,根据概率论原理,三个随机变量的取值有无穷多种组成。目前在我国的洪水频率分析计算中,根据防洪要求,一般考虑两种同频率地区组成情况:

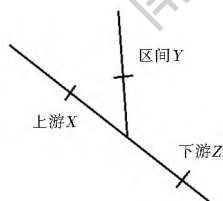


图1 流域洪水地区组成示意图

Fig. 1 Schematic depicting the composition of the flood region in the watershed

(1) 当下游断面发生设计频率 $P$ 的洪量 $Z_p$ 时,上游断面发生同频率洪量 $X_p$ ,而区间发生相应的洪量 $Y_c$ ,即

$$Y_c = Z_p - X_p \quad (1)$$

(2) 当下游断面发生设计频率 $P$ 的洪量 $Z_p$ 时,区间发生同频率洪量 $Y_p$ ,而上游断面发生相应的洪量 $X_c$ ,即

$$X_c = Z_p - Y_p \quad (2)$$

本文以“上下同频、区间相应”情况为例,对区间相应洪水的频率 $C$ 进行理论推导与探讨,明确其与设计频率 $P$ 的大小关系。

## 2 区间相应洪水频率大小的探讨

我国设计洪水计算中一般采用 $P-\dot{O}$ 型分布描述水文极值的概率分布,但对洪水地区组成问题,多维 $P-\dot{O}$ 分布难于处理,例如,如果假设上游和下游的洪水服从 $P-\dot{O}$ 分布,则对区间洪水,因涉及到多变量 $P-\dot{O}$ 联合分布的计算,难以确定其分布;而如果假设上、下游服从正态分布,可容易推求出区间洪水相应的正态分布函数。因此,先以正态分布情况为例,对区间洪水频率与上下游断面洪水设计频率之间的大小关系进行研究,再扩展到一般分布情况。

### 2.1 正态分布

对图1所示的随机变量 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ,满足水量平衡条件 $Z = X + Y$ 。进一步假设 $X$ 和 $Y$ 相互独立,由于当 $X$ 和 $Y$ 不独立时可采用变量代换的方法处理后使它们可按独立随机变量进行频率组合,故可以统一以两者独立为例讨论问题。

假定上、下游及区间的洪量均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ,即,上游断面洪量 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,区间洪量 $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ ,下游断面洪量 $Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$ 。图2所示即为正态分布概率密度图;图中 $\mu$ 为均值,同时也是中位数、众数; $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处达到最大,最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 。

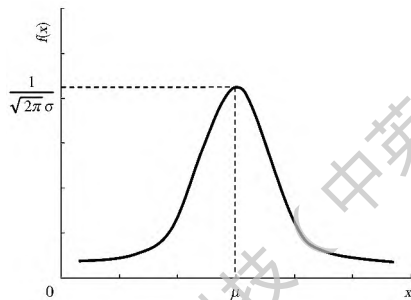


图2 正态分布概率密度图

Fig. 2 Probability density of normal distribution

$$\text{令 } \mu_y = m\mu_x \quad (m > 0), \quad \sigma_y^2 = n^2\sigma_x^2 \quad (n > 0),$$

$$\text{则 } \mu_z = \mu_x + \mu_y = \mu_x + m\mu_x, \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \sigma_x^2 + n^2\sigma_x^2,$$

即,变量 $Y$ 和 $Z$ 的分布参数均可由 $X$ 的参数表示: $Y \sim Z(m\mu_x, n^2\sigma_x^2)$ ,  $Z \sim N(\mu_x + m\mu_x, \sigma_x^2 + n^2\sigma_x^2)$ 。

分别计算一定洪量下的上、下游以及区间的洪水频率,以上游断面洪量发生 $\{X \geq x\}$ 事件的频率计算为例:

$$P_1(X \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_x^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \quad (3)$$

令  $\frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = t$ , 则,  $x = \sqrt{2}\sigma_x \cdot t + \mu_x$ ,  $dx = \sqrt{2}\sigma_x \cdot dt$

因为  $x \in (x, +\infty)$ , 所以  $t \in \left[ \frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} + \infty \right)$ ,

$$P_1(X \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{\frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}}^{\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma_x dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (4)$$

同理:

$$P_2(Y \geq y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y-\mu_y}{\sqrt{2}\sigma_y}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y-m\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (5)$$

$$P_3(Z \geq z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-\mu_z}{\sqrt{2}\sigma_z}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-(1+m)\mu_x}{\sqrt{2(1+n^2)}\sigma_x}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (6)$$

对“上下同频”, 等价于  $P_1(X \geq x) = P_3(Z \geq z)$ ,

也就是等价于其积分下限相等, 即:

$$\frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = \frac{z-(1+m)\mu_x}{\sqrt{2(1+n^2)}\sigma_x} \quad (7)$$

由此可以推得:

$$z = \sqrt{1+n^2}(x-\mu_x) + (1+m)\mu_x \quad (8)$$

同理, 可以比较由式(4)和式(5)代表的上游和区间洪量频率的大小。

设  $\Delta$  为式(4)和(5)积分下限之差, 即

$$\Delta = \frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sqrt{2}\sigma_y}, \text{ 结合式(8)并 } Y = Z - X, \text{ 则:}$$

$$\Delta = \frac{x-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = (x-\mu_x) \frac{(n+1) - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2}n\sigma_x} \quad (9)$$

若  $\Delta > 0$ , 则表明区间洪量的频率大于上、下游断面洪量的设计频率;

若  $\Delta = 0$ , 则表明区间洪量的频率等于上、下游断面洪量的设计频率;

若  $\Delta < 0$ , 则表明区间洪量的频率小于上、下游断面洪量的设计频率。

因为式(9)中  $\frac{(n+1) - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2}n\sigma_x} > 0$  恒成立, 因此:

(1) 当  $x < \mu_x$  时, 即当上、下游断面洪量的设计频率大于 0.5 时,

$$\Delta < 0, P_1(X \geq x) = P_3(Z \geq z) > P_2(Y \geq y),$$

此时, 区间相应洪量的频率  $C$  小于上、下游断面洪量的设计频率  $P$ 。

(2) 当  $x = \mu_x$  时, 即当上、下游断面洪量的设计

频率等于 0.5 时,

$$\Delta = 0, P_1(X \geq x) = P_3(Z \geq z) = P_2(Y \geq y),$$

此时, 区间相应洪量的频率  $C$  等于上、下游断面洪量的设计频率  $P$ 。

(3) 当  $x > \mu_x$  时, 即当上、下游断面洪量的设计频率小于 0.5 时,

$$\Delta > 0, P_1(X \geq x) = P_3(Z \geq z) < P_2(Y \geq y),$$

此时, 区间相应洪量的频率  $C$  大于上、下游断面洪量的设计频率  $P$ 。

由此说明, 对正态分布情形, 同频率地区组成后相应洪量那部分的频率与设计频率之间的大小关系, 取决于上下游断面洪量的大小。对设计洪水问题, 设计频率一般小于 0.5, 即上游和下游断面洪量均大于均值, 则按照“上下同频、区间相应”得到的区间洪量的频率是大于设计频率的; 换句话说, 若上、下游洪量按百年一遇标准设计, 则区间洪量就小于百年一遇。对枯水或径流设计问题而言, 设计频率(或保证率)大于 0.5, 则结论正好相反。

对其他的同频率地区组成方案, 如“区间与下游同频、上游相应”等, 亦可得到相类似结论。

## 2.2 P-Ⅰ型分布

我国水文频率分析中, 假设洪水极值服从 P-Ⅰ型分布, 对洪水地区组成问题, 这涉及到多变量 P-Ⅰ联合分布的计算问题, 十分复杂, 难以像上述对正态分布那样, 可采用理论推导方式讨论相应洪量的频率。因此, 本文采用统计试验方法<sup>[14][15]</sup>, 研究当洪水服从 P-Ⅰ型分布时, “上下同频、区间相应”地区组成方案中, 区间相应洪量的频率问题。

考虑到实际情况中, 下游洪量等于上游洪量与区间洪量之和, 所以下游洪量一定是大于上游洪量(这是闭合流域的一般情形, 非闭合流域或区间及沿程损失偏大的特殊情形除外)。因此, 统计试验中假定总体统计参数时, 应保证随机产生的下游洪量能大于上游洪量。为不失一般性, 本研究统一取上游洪量  $X$  的均值  $E_x = 1000$ , 下游洪量  $Z$  的均值  $E_z = 2000$ , (当然, 上下游洪量均值也可以选取其它值, 但只要保证下游大于上游, 结论是相同的)。同时, 为涵盖实际工程中可能出现的 P-Ⅰ型总体分布情况, 使结果具有普适性, 将统计试验中离势系数  $C_v$  和偏态系数与离势系数的比值  $C_s/C_v$  取为一些特定值, 与现行水文频率计算的做法相一致。本研究中, 上下游的离势系数  $C_v$  分别同时取 0.2、0.4、0.5、0.7、1.0; 对偏态系数与离势系数的比值  $C_s/C_v$ , 上游断面分别取 2、3、4 三种情况, 而下游只

取  $C_s/C_v = 4$  一种情况; 故共有 15 种总体组合的统计试验方案。对每种方案, 随机生成 10 万个“上下同频、区间相应”地区组成的洪水样本, 分析区间相应洪量的频率与“上下同频”中频率之间的大小关系; 其中, 设计频率取 0.01%、0.1%、1%、2%、10%、20%、25%、30%、35%、40%、45%、50%、60%、75%、80%、90%、95%、97%、99%、99.9% 共 20 种情形进行分析。由于生成的 10 万个样本, 容量足够大, 所以对上游和下游断面, 直接采用其样本的累积经验分布估计各种设计频率  $P$  下的洪量, 两者之差(下游  $Z_p$  减上游  $X_p$ ) 即是区间的相应洪量(记为  $Y_c$ ); 该  $Y_c$  所对应的频率按照下述方法推求: 区间 10 万个相应洪量样本由下游断面与上游断面 10 万个洪量样本之差得到, 再根据其样本累积经验分布, 即可得到与设计频率  $P$  相应的洪量及其频率(记为  $C$ )。

以上游断面洪量  $E_x = 1\ 000$ 、 $C_v = 0.4$ 、 $C_s/C_v = 4$ , 下游断面洪量  $E_z = 2\ 000$ 、 $C_v = 0.4$ 、 $C_s/C_v = 4$  的地区组成方案为例, 计算结果见表 1, 区间相应洪量的频率  $C$  与设计频率  $P$  之间关系见图 3。

表 1 典型组成方案统计试验结果

Tab. 1 The statistical test results of a typical composition scheme

频率 $P$ (%)	下游洪量 $Z_p$	上游洪量 $X_p$	区间相应 洪量 $Y_c$	区间 相应 洪量 所对应 的频率 $C$ (%)	$(GP)/C$
	$E_z = 2\ 000$ $C_v = 0.4$ $C_s/C_v = 4$	$E_x = 1\ 000$ $C_v = 0.4$ $C_s/C_v = 4$	$Y_c =$ $Z_p - X_p$		
0.01	8 337	3 806	4 530	0.3	0.97
0.1	6 224	3 170	3 055	3	0.96
1	4 682	2 350	2 332	8	0.87
2	4 213	2 117	2 096	11	0.81
10	3 056	1 538	1 518	22	0.56
20	2 531	1 277	1 254	31	0.36
25	2 361	1 188	1 173	34	0.27
30	2 216	1 115	1 101	37	0.20
35	2 094	1 052	1 042	40	0.13
40	1 982	995	987	43	0.07
45	1 883	945	939	45	0.00
50	1 791	900	891	48	- 0.05
60	1 630	818	812	52	- 0.15
75	1 414	708	705	58	- 0.28
80	1 345	674	671	61	- 0.32
90	1 205	602	603	65	- 0.39
95	1 126	563	564	67	- 0.41
97	1 088	544	544	68	- 0.42
99	1 043	521	522	70	- 0.42
99.9	1 010	505	505	71	- 0.41

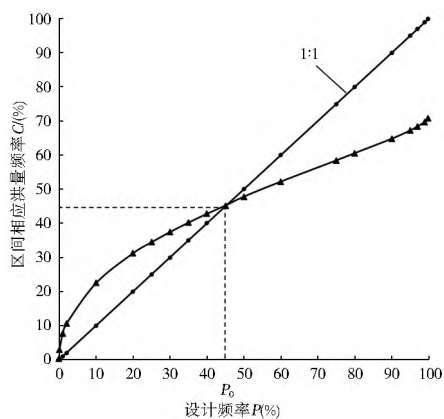


图 3 典型组成方案区间相应洪量频率  $C$  与设计频率  $P$  关系

Fig. 3 Relationship between the corresponding flood frequency of interval areas ( $C$ ) and the design frequency ( $P$ )

从图 3 可以看出, 存在一个设计频率临界点  $P_0$  (两条线交点对应的的设计频率), 当“上、下同频”中设计频率  $P$  的取值大于临界点  $P_0$  时, 区间相应洪量的频率将小于  $P$ , 即  $C < P$ ; 当设计频率  $P$  的取值刚好等于临界点  $P_0$  时, 区间相应洪量的频率  $C = P$ ; 当设计频率  $P$  的取值小于临界点  $P_0$  时, 区间相应洪量的频率  $C > P$ 。由此说明, 对  $P$ - $\hat{O}$  型分布, 同频率地区组成后相应洪量频率  $C$  与设计频率  $P$  之间的大小关系, 取决于上游与下游断面洪量的大小, 即与“同频”中设计频率的取值有关。此结论与正态分布情形通过理论推导得到的结论是一致的, 只是对于正态分布, 设计频率临界点  $P_0$  等于 0.5, 而对于  $P$ - $\hat{O}$  型分布, 临界点  $P_0$  的值不固定, 与上下洪水大小的组成有关, 图 3 中,  $P_0 = 45\%$ , 属于  $P_0 < 50\%$  的组成情况。

类似地, 可以得到其它总体组成方案的设计频率临界点  $P_0$ , 表 2 列出了全部 15 组方案的统计试验结果。从中可知, 对所有的总体组成方案, 设计频率临界点  $P_0$  的最大值为 60%、最小值为 35%。对设计洪水问题而言, 由于设计频率一般均较小, 如  $P = 0.01\%$ 、 $0.1\%$ 、 $1\%$  等, 远小于 35%, 所以, 按照“上下同频、区间相应”得到的区间洪量, 其对应的频率是大于“同频”中的设计频率的; 即若上、下游洪量按百年一遇标准 ( $P = 1\%$ ) 进行同频率地区组成, 则区间洪量就小于百年一遇。同理, 对径流或枯水设计问题而言, 设计频率(或设计保证率) 一般都在 75%、90% 等以上(均大于 60%), 则结论类同, 即按照“上下同频、区间相应”得到的区间径流量, 其频率是小于设计保证率的, 是达不到设计保证程度要求的。

综上所述, 对水文同频率地区组成问题, 如“上下同频、区间相应”组成方案中, 区间相应洪量(径流量) 频率的大小, 无论是对正态分布进行的理论推导, 还是对  $P$ - $\hat{O}$  分布进行的统计试验, 均可得到如

下结论:对设计洪水问题而言,相应洪量的频率大于“同频”中的设计频率;而对设计径流或枯水问题而言,区间相应径流量的频率小于其设计保证率。

表 2 设计频率临界点  $P_0$  统计试验结果

Tab.2 The statistical test results of the critical point  $P_0$  of design frequency

项目		下游断面 $C_v$					
		$(E_z=2\ 000, C_s/C_v=4)$					
		0.2	0.4	0.5	0.7	1.0	
上游断面 $C_s/C_v$	$E_x=1\ 000$	2	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6
	$C_v$ 与下游相同	3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6
		4	0.5	0.45	0.45	0.4	0.35

### 3 结论

本文对水文上常用的同频率地区组成方案中“相应洪量或径流量”的频率问题进行了研究,通过正态分布的理论推导及  $P-\hat{O}$  分布的统计试验,得到如下主要结论。

以“上下同频、区间相应”的组成方案为例,存在一个频率临界点  $P_0$ ,使得当“同频”中的设计频率  $P$  的取值大于  $P_0$  时,“相应”量的频率  $C$  将小于设计频率  $P$ ,即  $C < P$ ;而当设计频率  $P$  的取值等于  $P_0$  时,“相应”量的频率  $C = P$ ;当设计频率  $P$  的取值小于  $P_0$  时,“相应”量的频率  $C > P$ 。频率临界点  $P_0$  值的大小与假定的水文变量总体分布型式有关,对正态分布,  $P_0 = 50\%$ ;对  $P-\hat{O}$  分布,  $P_0$  并不固定。本文对水文上常用的  $P-\hat{O}$  总体的统计试验结果表明,  $P_0$  的变化范围约在  $35\% \sim 60\%$  之间。

对于设计洪水问题,由于“同频”中的设计频率  $P$  一般远小于  $35\%$ ,如  $P = 0.01\%、0.1\%、1\%$  等,所以根据“上下同频、区间相应”求得的区间相应洪量,其频率将大于设计频率。对于径流或枯水设计问题,由于设计频率(或设计保证率)  $P$  一般都大于  $65\%$ ,如  $P = 75\%、90\%、95\%$  等,则按照“上下同频、区间相应”得到的区间径流量,其频率  $C$  是小于设计保证率  $P$  的,即达不到设计保证程度要求。此结论对同频率地区组成中的其它方案,如“区间与下游同频、上游相应”等,也是类同的。

另外,对其它不同的统计分布模型(线型),频率临界点  $P_0$  将是不一样的,相应结论也会有所不同,但本文的方法同样可以借鉴应用。

#### 参考文献(References):

[1] MAIDMENT D R. handbook of hydrology[J]. Earth Science Reviews, 1993, 24:227-229.  
 [2] SL44-2006. 水利水电工程设计洪水计算规范[S]. (SL44-2006. Design flood calculation regulating for water resources and hydropower engineering[S]. (in Chinese))

[3] KENDALL M G. The advanced theory of statistics. [J]. Technometrics, 1963, 5(4): 525-528. DOI: 10. 2307/2528806  
 [4] 梁忠民,钟平安,华家鹏. 水文水利计算[M]. 北京:中国水利水电出版社,2008. (LIANG Z M, ZHONG P A, HUA J P. Hydrology and Water Conservancy Calculation [M]. Beijing: Hydropower and Electrical Press, 2008. (in Chinese))  
 [5] 水利部长江水利委员会水文局. 水利水电工程设计洪水计算手册[M]. 北京:水利电力出版社,1995. (Bureau of Hydrology, Changjiang Water Resources Commission of The Ministry of Water Resources. Handbook of calculation design flood for water resources and hydropower projects. Beijing: Hydropower and Electrical Press, 1995. (in Chinese))  
 [6] 王锐琛,陈源泽,孙汉贤. 梯级水库下游洪水概率分布的计算方法[J]. 水文,1990(1): 1-8. (WANG R C, CHEN Y Z, SUN H X. Flood distribution estimation at downstream cascade reservoirs. Journal of China Hydrology, 1990(1): 1-8. (in Chinese))  
 [7] 蔡振华. 洪水频率组合模型及工程应用研究[D]. 武汉:武汉大学,2005. (CAI Z H. The study on the model of flood frequency combination and application to engineering[D]. Wuhan: Wuhan University, 2005. (in Chinese))  
 [8] 谢迪泉,余文公. 用频率组合法分析湘潭站设计洪水水位[J]. 黑龙江水利科技,2006,34(3): 1-2. (XIE D Q, YU W G. Analysis of design flood level of xiangtan station by frequency combination method[J]. Heilongjiang Science and Technology of Water Conservancy, 2006, 34(3): 1-2. (in Chinese)) DOI: 10. 3969/j. issn. 1007-7596. 2006. 03. 001.  
 [9] FAYRE A C, ADLOUNISE, PERREAULT L, et al. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas[J]. Water Resources Research, 2004, 40(1): 290-294. DOI: 10. 1029/2003WR002456.  
 [10] 闫宝伟,郭生练,郭靖,等. 基于 Copula 函数的设计洪水地区组成研究[J]. 水力发电学报,2010,29(6): 60-65. (YAN B W, GUO S L, GUO J, et al. Regional design flood composition based on Copula function[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010, 29(6): 60-65. (in Chinese))  
 [11] 刘和昌,梁忠民,姚轶,等. 基于 Copula 函数的水文变量条件组合分析[J]. 水力发电,2014,40(5): 13-16. (LIU H C, LIANG Z M, YAO Y, et al. Analysis on conditional compositions of hydrological variants based on Copula function[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2014, 40(5): 13-16. (in Chinese)) DOI: 10. 3969/j. issn. 0559-9342. 2014. 05. 004.  
 [12] 刘章君,郭生练,李天元,等. 设计洪水地区组成的区间估计方法研究[J]. 水利学报,2015,46(5): 543-550. (LIU Z J, GUO S L, LI T Y, et al. Impact of reservoir on downstream flood prevention. Journal of Hydraulic Engineering, 2015, 46(5): 543-550. (in Chinese)) DOI: 10. 13243/j. cnki. slxb. 20140928.  
 [13] 秦毅. 河流交汇处设计洪峰流量的分析研究[J]. 西安理工大学学报,2001,17(1): 57-61. (QIN Y. An analytical study of designing peak flow at river confluence reaches[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2001, 17(1): 57-61. (in Chinese)) DOI: 10. 3969/j. issn. 1006-4710. 2001. 01. 013.  
 [14] 布斯连科,施廖盖尔. 统计实验法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1964. (H. II, IO. A. Statistical experiment method[M]. Shanghai Shanghai Science and Technology Press, 1964. (in Chinese))  
 [15] 华东水利学院. 水文学的概率统计基础[M]. 北京:水利出版社,1981. (Hohai University. Probability and Statistics Basis of Hydrology[M]. Beijing: Hydropower and Electrical Press, 1981. (in Chinese))